كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٢

المحاضرة : **الخامسة**/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التكاملات المثلثية _ التكامل المحدد

- **حساب التكاملات من الشكل $I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ حيث:**
  $b^2 - 4ac \neq 0$

لإيجاد هذه التكاملات نتمم ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ إلى مربع كامل فيتحول التكامل إلى أحد الأشكال الآتية:

1. $I_1 = \int R\left(t, \sqrt{k^2 - t^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\sin u$ فيكون $dt = k.\cos u\,.du$

2. $I_2 = \int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\mathrm{sh}\,u$ فيكون $dt = k.\mathrm{ch}\,u\,.du$ أو نفرض $t = k\,tg\,u$

3. $I_3 = \int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right).dt$

لحله نفرض $t = k.\mathrm{ch}\,u$ فيكون $dt = k.\mathrm{sh}\,u\,.du$ أو نفرض $t = \frac{k}{\cos u}$

أوجد التكامل $\boldsymbol{I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}.dx}$

لحل هذا التكامل نفرض $x = 3\sin u$ فيكون $dx = 3\cos u\,.du$

$$I = \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}.dx = \int \frac{\sqrt{9 - 9(\sin u)^2}.(3\cos u)}{9\,(\sin u)^2}\,.du = \int \frac{9(\cos u)^2}{9(\sin u)^2}.du$$
$$= \int (cotg\,u)^2.du = \int ((cotg\,u)^2 + 1 - 1).du$$

$$I = -cotg\,u - u + c = -cotg\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) - \left(\arcsin\frac{x}{3}\right) + c$$

تكامل الدوال المثلثية من الشكل: $I = \int R(\sin x, \cos x)\,.dx$

لحساب هذه التكاملات نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $\frac{x}{2} = arctg\,t$ أي

$x = 2arctg\,t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ حيث $-\pi < x < \pi$

و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

يؤول التكامل إلى تكامل كسري

مثال: $I_1 = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $x = 2arctg\ t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ نبدل في التكامل المعطى

$$I_1 = \int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + c$$
$$= \ln\left|1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin x.(2+\cos x-2\sin x)}$$

نفرض أن $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و بالتالي $x = 2arctg\ t$ و منه $dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$ و باستخدام الدساتير $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ نبدل في التكامل المعطى

$$I_2 = \int \frac{2\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)}$$

و هو تكامل كسري لحله نقوم بتفريق الكسر $\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}$

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}$$

بحساب الثوابت نجد:

$$\frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{t}+\frac{\frac{5}{3}}{t-3}+\frac{-1}{t-1}$$

$$\int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}.dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int \frac{dt}{t-3}-\int \frac{dt}{t-1}$$

$$\int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}.dt = \frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+c$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin x.(2+\cos x-2\sin x)}$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{5}{3}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-3\right| - \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}\right)-1\right| + c$$

❁ **مكاملة بعض الأشكال الخاصة من الدوال المثلثية** $I = \int R(\sin x, \cos x).dx$

- إذا كانت الدالة R تغير إشارتها إذا بدلنا كل $\cos x$ بالمقدار $-\cos x$ ، أي:

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

عندئذٍ نفرض أن: $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x.dx$

مثال: أوجد التكامل: $I = \int \frac{(\cos x)^3}{(\sin x)^2}.dx$

$$R(x) = \frac{cos^3x}{sin^2x}, \frac{(-\cos x)^3}{sin^2x} = -\frac{cos^3x}{sin^2x} = -R(x)$$

$R(x)$ تغير إشارتها إذا وضعنا $-\cos x$ مكان كل $\cos x$ لذا

نفرض أن: $t = \sin x$ فيكون $dt = \cos x.dx$ و بالتالي:

$$I = \int \frac{cos^2x.cosx}{sin^2x}.dx = \int \frac{(1-cos^2x).cosx}{sin^2x}.dx$$
$$I = \int \frac{1-t^2}{t^2}.dt = \int \frac{dt}{t^2} - \int dt = -\frac{1}{t} - t + c$$

- إذا كانت الدالة R تغير إشارتها إذا بدلنا كل $\sin x$ بالمقدار $-\sin x$ ، أي:

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

عندئذٍ نفرض أن: $t = cos\,x$ فيكون $dt = -\sin x.dx$

مثال: أوجد التكامل الآتي: $I = \int sin^5x.cos^2x.dx$

نلاحظ أن: $(-\sin x)^5.cos^2x = -sin^5x.cos^2x = -R(x)$ لذا نفرض أن: $t =$

$cos\,x$ فيكون $dt = -\sin x.dx$ و منه:

$$I = \int (sin^2x)^2.cos^2x.\sin x.dx = \int (1-cos^2x)^2.cos^2x.\sin x.dx$$
$$I = \int (1-t^2)^2.t^2.(-dt) = -\int (1-2t^2+t^4).t^2.dt = \int (-t^6+$$
$$2t^4-t^2).dt = -\frac{1}{7}t^7 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + c$$
$$I = -\frac{1}{7}(\cos x)^7 + \frac{2}{5}(\cos x)^5 - \frac{1}{3}(\cos x)^3 + c$$

- إذا لم تتغير إشارة الدالة R عند وضع $-cosx$ مكان كل $cosx$ و وضع $-\sin x$ مكان كل $\sin x$ ، عندئذٍ نستطيع أن نفرض أن: $t = tgx$ أو $t = sinx$

أو $t = cosx$

مثال: أوجد التكامل : $I = \int \frac{sin^4x}{cos^6x}.dx$

الدالة $R(x) = \frac{sin^4x}{cos^6x}$ لا تغير إشارتها عند وضع $-cosx$ مكان كل $cosx$ و وضع

$-\sin x$ مكان كل $\sin x$ ، لذا نفرض أن: $t = tgx$ أي: $x = arctg\ t$ فيكون: $dx =$

$\frac{dt}{1+t^2}$ ، من جهة ثانية نلاحظ: $t = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = t.\cos x$ و بالتعويض بالعلاقة:

$sin^2x + cos^2x = 1$ و الإصلاح نجد: $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$

فيكون: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ و $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$I = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4 . \frac{dx}{cos^2x} = \int tg^4x . \frac{1}{cos^2x} . dx = \int t^4(1+t^2) . \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int t^4 . dt = \frac{1}{5}t^5 + c = \frac{1}{5}tg^5x + c$$

❁ **التكاملات من النمط: $I = \int sin^n x . cos^m x . dx$ حيث: $n, m \in \mathbb{Z}$**

نميز الحالات الآتية:

1. n عدد فردي عندئذٍ نفرض أن $t = cosx$
2. m عدد فردي عندئذٍ نفرض أن $t = sinx$
3. n, m زوجيان معاً عندئذٍ نفرض أن $t = tgx$
4. n, m فرديان معاً عندئذٍ تجوز الحالات السابقة كلها.

مثال: أوجد التكامل $I = \int \frac{sin^3x}{cos^5x} . dx$

$$I = \int sin^3x . cos^{-5}x . dx$$

نلاحظ أن n, m فرديان معاً ، لذا نفرض أن: $t = tgx$ أي: $x = arctg\ t$ فيكون: $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

فيكون: $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ و $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$$I = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^3 . \frac{dx}{cos^2x} = \int tg^3x . \frac{1}{cos^2x} . dx = \int t^3(1+t^2) . \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int t^3 . dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{4}tg^4x + c$$

❁ حساب التكاملات من النمط:

$\int \sin \alpha x . \sin \beta x . dx$ أو $\int cos\ \alpha x . \cos \beta x . dx$ أو $\int \sin \alpha x . \cos \beta x . dx$

لحساب هذه التكاملات نستخدم دساتير التحويل:

$$sin\alpha x\ .cos\beta x = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)x + sin(\alpha-\beta)x]$$

$$cos\alpha x\ .cos\beta x = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)x + cos(\alpha-\beta)x]$$

$$sin\alpha x\ .sin\beta x = -\frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta)x - cos(\alpha-\beta)x]$$

مثال: أوجد التكامل $I = \int sin6x\ .cos2x\ .dx$

$$I = \frac{1}{2}\int [sin(6+2)x + sin(6-2)x]\ .dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int [sin(8x) + sin(4x)]\ .dx = -\frac{1}{16}cos(8x) - \frac{1}{8}cos(4x) + c$$

حساب التكامل المحدد:

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$، لنعرف الدالة $F(x)$ في المجال $[a,b]$ كما يلي:

$F(x)=\int_a^x f(t).dt$ حيث $a\le x\le b$، عندئذٍ تكون الدالة $F(x)$ قابلة للاشتقاق عند x و يعطى المشتق بالعلاقة $F'(x)=f(x)$ و عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$\int_a^x f(t).dt=F(x)-F(a),\forall x\in[a,b]$ و في حالة خاصة عندما $x=b$ نجد:

$$\int_a^b f(t).dt=F(b)-F(a)$$

خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^a f(x).dx=0$
2. $\int_a^b f(x).dx=-\int_b^a f(x).dx$
3. $\int_a^b k.f(x).dx=k.\int_a^b f(x).dx$ حيث k عدد ثابت.
4. $\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)].dx=\int_a^b f_1(x).dx+\int_a^b f_2(x).dx+\cdots+\int_a^b f_n(x).dx$
5. بفرض $c\in[a,b]$ عندئذٍ يكون: $\int_a^b f(x).dx=\int_a^c f(x).dx+\int_c^b f(x).dx$
6. إذا كان $f(x)\ge 0,\forall x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x).dx\ge 0$
7. إذا كانت الدالتان $f(x),g(x)$ تحققان $f(x)\ge g(x),\forall x\in[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x).dx\ge\int_a^b g(x).dx$$

8. إذا كان $m\le f(x)\le M,\forall x\in[a.b]$ حيث m,M ثوابت عددية، عندئذٍ:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x).dx\le M(b-a)$$

كما لأنه يوجد العدد μ حيث $m\le\mu\le M$ الذي يحقق $\int_a^b f(x).dx=\mu(b-a)$

ندعو $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$ القيمة الوسطى للدالة $f(x)$ في المجال $[a,b]$.

أمثلة:

احسب التكاملات الآتية:

$I_1=\int_{-1}^{2} x.\sin(x^2).dx$

نفرض أن $t=x^2$ فيكون $dt=2x.dx$ و منه $dx=\frac{dt}{2x}=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

عندما $x=-1$ فإن $t=1$ و عندما $x=2$ فإن $t=4$ نبدل في التكامل المعطى:

$$I_1 = \int_1^4 \sqrt{t}.\sin t.\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^4 \sin t\,.dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_1^4 = \frac{1}{2}[-\cos 4 + cos1]$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$$

نفرض $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ و منه $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ و $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

عندما $x = 0$فإن $t = 0$ و عندما $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = 1$ نبدل في التكامل المعطى:

$$\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+3} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$I_3 = \int_0^1 x^2.arctg\,x.dx$$

نكامل بطريقة التجزئة:

نفرض: $u = arctg\,x$ فيكون $du = \frac{dx}{1+x^2}$ و $dv = x^2.dx$ فيكون $v = \frac{1}{3}x^3$ و منه:

$$I_3 = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\,x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}x^3.\frac{dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\,x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right).dx$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{3}x^3.arctg\,x\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}ln(2)$$

مكتبة A to Z