كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مبرهنة (1):

لتكن التابع التحليلي (دالة تحليلية) $f(z)$ في حلقة لوران ضمن الحلقة $r_0 < |z-a| < R_0$ وحيدة.

مبرهنة (2):

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية ضمن الحلقة $r_0 < |z-a| < R_0$ فإن الأمثال C_n في حلقة لوران لـ f ضمن D تحقق المتراجحة:

$$|C_n| < \frac{M}{R^n} \quad (1) \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad M = \max_{(\gamma)} |f(z)|$$

حيث (γ) هو المنحني $\gamma : |z-a| = R$ حيث $r_0 < R < R_0$ و R يمثل نصف قطر المقاربة.

نسمي المتراجحة (1) متراجحة كوشي.

تعريف: ليكن $f(z)$ تابع وحيد القيمة يقال أن $z=a$ نقطة شاذة ذات طبيعة واحدة للتابع f إذا لم يكن f تحليلياً في a وتسمى النقطة الشاذة $z=a$ و $(z \neq \infty)$ معزولة للتابع f إذا كان f تحليلياً في جوار a.

النقطة $z=\infty$ تكون نقطة شاذة للتابع $P(z)$ إذا وقعت $P\left(\frac{1}{\xi}\right)$ إذا كانت النقطة $\xi=0$ نقطة شاذة للتابع $P\left(\frac{1}{\xi}\right)$ وتسمى النقطة الشاذة $z=\infty$ بمزولة التابع $P(z)$ إذا كانت P تحليلية في جوار $z=\infty$ المأخوذة من $R<|z|<\infty$

أي إذا وجدت دائرة مركزها المبدأ بحيث لا يقع خارجها أية نقطة شاذة لـ P سوى ∞

إذا لم تكن النقطة الشاذة a مزولة نسميها نقطة شاذة غير معزولة ومن الواضح أنه لكي يوجد نقطة شاذة غير معزولة لتابع P يجب أن يكون عدد النقاط الشاذة المعزولة غير منتهي عندئذٍ تكون تلك النقطة نقطة تراكم لمجموعة النقاط الشاذة.

مثال:

$P(z)=\frac{1}{\sin z}$ يوجد أمامنا لهذه الحالة لأن $1\neq 0$ النقاط الشاذة هي حل المعادلة $\sin z=0$

جميعها نقاط شاذة معزولة $z_k=k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} k\pi = \infty$$

بالتالي ∞ نقطة التراكم.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تصنيف النقاط الشاذة :

لتكن a نقطة شاذة معزولة لدالة وحيدة القيمة $f(z)$ فإنّ a تسمى :

1) شاذة قابلة للإزالة / للإصلاح : إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ موجودة وعددية.

مثال : $z_0 = -i$ نقطة شاذة لـ $f(z) = \frac{z^2+1}{z+i}$ قابلة للإزالة لأن :

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{(z-i)(z+i)}{z+i} = \lim_{z\to -i} z-i = -2i$$

موجودة وعددية.

الإصلاح : تعريف الدالة :

$$g(z) = \begin{cases} f(z) ; & z \neq -i \\ -2i ; & z = -i \end{cases}$$

مثال : النقطة $z=0$ لتابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

النقطة $z = \infty$ لتابع $f(z) = \frac{z}{z+1}$ نقطة قابلة للإزالة

---

2) قطب لدالة f :

إذا كانت النهاية موجودة وغير عددية

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

النقطة $z=-1$ لتابع $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$ قطب من المرتبة الثانية لأن $z=-1$

معرف المرتبة الثانية لدالة $f_1(z)=\frac{1}{f(z)}$

3) نظرية أساسية:

إذا كانت النهاية $\lim_{z\to a} f(z)$ غير موجودة.

كالنقطة $z=0$ لكل من التوابع $\sin\frac{1}{z}$ ، $\cos\frac{1}{z}$ ، $e^{\frac{1}{z}}$

والنقطة $z=\infty$ لكل التوابع $\sin z$ ، $\cos z$ ، e^z

تمرين:

- حدد نوع النقاط الشاذة في المستوي المركب $\mathbb{C}$ لدالة:

$$f(z)=\frac{z^2+9}{z^2(z-3)}$$

الحل:

النقاط الشاذة هي حل المعادلة $z^2(z-3)=0$

$z_1=0$ ، $z_2=3$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+9}{z^2(z-3)}=\infty$$

بالتالي $z=0$ قطب من المرتبة الثانية.

$$\lim_{z\to 3} f(z)=\infty$$

$z=3$ قطب من المرتبة الأولى (قطب بسيط).

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

نقطة شاذة قابلة للإزالة.

تمرين: حدد نوع النقاط الشاذة فيما يلي:

1) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$

$z=0$ نقطة شاذة

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$

النهاية موجودة ومحدودة بالتالي النقطة $z=0$ قابلة للإزالة

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & ; z \neq 0 \\ 1 & ; z = 0 \end{cases}$$

2) $f(z) = \frac{1}{z^3}$

$z=0$ نقطة شاذة.

$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^3} = \infty$

$z=0$ قطب من المرتبة الثالثة

تعريف: نقول عن النقطة الشاذة z_0 إنها قطب من الرتبة m إذا كان:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية وتحقق $g(z_0)\neq 0$

مثال:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\frac{\sin z}{z^2(z+1)-(z+1)}$$

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z+1)(z^2-1)}=\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}$$

دالة نسبية، دائمة $z=1$, $z=-1$

$$\lim_{z\to -1} f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\infty$$

$z=-1$ قطب للدالة من المرتبة الأولى (قطب بسيط)

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}=\infty$$

$z=1$ قطب من المرتبة الثانية

مثال:

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{2e^{z-1}-z^2-1}$$

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\infty$$

لإيجاد مرتبة القطب نفرض:

$$g(z)=\sin \pi z \ , \ h(z)=2e^{z-1}-z^2-1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z=1$ قطب من المرتبة الأولى لتابع $g(z)$ قطب بسيط.

بالنسبة لـ $h(z)$ فإنّ:

$$h'(z) = 2e^{z-1} - 2z$$
$$\Rightarrow h'(1) = 0$$
$$h''(z) = 2e^{z-1} - 2$$
$$\Rightarrow h''(1) = 0$$
$$h^{(3)}(z) = 2e^{z-1}$$
$$\Rightarrow h^{(3)}(1) = 2$$

$z=1$ قطب من المرتبة الثالثة لدالة $h(z)$ بالتالي $z=1$ قطب من المرتبة $(3-1)$ أي من المرتبة الثانية لدالة $f(z)$

العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة:

يحدد القسم الرئيسي في سلسلة لوران لتابع وحيد القيمة f حول النقطة الشاذة a نوع هذه النقطة. بالعكس يعرف نوع النقطة الشاذة بتطبيع بعدد حدود القسم الرئيسي:

1) النقطة الشاذة قابلة للإزالة:

برهنة (3):

لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة لتابع f عندئذٍ تكون $z=a$ قابلة للإزالة أو قابلة للإصلاح لتابع f إذا وفقط إذا كان القسم الرئيسي في سلسلة لوران معدوم

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتابع f حول a (غير موجود).

2 النقطة الشاذة القطب:

تعريفة (4):

لتكن $z=a$ نقطة شاذة معزولة لتابع f عندئذٍ تكون النقطة a قطباً لتابع f إذا وفقط إذا كان:

$$f(z)=(z-a)^{-m}\,\psi(z)$$

حيث $\psi(z)$ تابع تحليلي لا ينعدم في النقطة a و m عدد صحيحاً.

تعريفة (5):

لتكن $z=\infty$ نقطة شاذة معزولة لـ f تكون $z=\infty$ قطباً من المرتبة m لتابع f إذا وفقط إذا كانت عدد حدود القسم الرئيسي في سلسلة لوران لـ f حول $z=\infty$ (أي حدود z موجبة) منتهي وأكبر أس موجب هو m في حالة $z=\infty$ ينقلب القسم الرئيسي ثانوي القسم الرئيسي.

تعريفة (6):

لتكن $z=a\neq\infty$ نقطة شاذة معزولة لـ f تكون a قطباً من المرتبة m لتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيسي في سلسلة لوران لتابع f حول a منتهي وأكبر أس سالب هو $-m$ (أعلى أس بالقيم m)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3 النقطة الشاذة نقطة شاذة أساسية:

برهنة (7):

لتكن a نقطة شاذة معزولة لتابع f تكون النقطة a شاذة أساسية لتابع f إذا وفقط إذا كان عدد حدود القسم الرئيسي في سلسلة لوران لتابع f حول a غير منتهي.

مثال:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\quad ,\ z=-1$$

$z=-1$ نقطة شاذة قطب من الرتبة الأولى قطب بسيط

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\quad ,\ z=0$$

$z=0$ نقطة شاذة غير معزولة لأن انعدام الشاذة الدالة هي:

$$z_k=\frac{i}{k\pi}$$

$$\lim_{k\to\infty} z_k=\lim_{k\to\infty}\frac{i}{k\pi}=0$$

بالتالي $z=0$ نقطة تراكم وهي نقطة شاذة غير معزولة.

$$f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z}\quad ,\ z=0$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-1+z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3!}-\frac{z^3}{4!}+\dots$$

القسم الرئيسي معدوم (غير موجود) بالتالي $z=0$ نقطة شاذة مقابلة لإزالة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة