كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عقدي١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

1) انظر للتوسعات المختلفة لسلسلة لوران $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+2z-2}$ في جوار $z_0=0$

الحل:

$$f(z)=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}$$

الدالة $f(z)$ تملك $z_1=-2$, $z_2=1$ (نقاط شاذة) وعليه لدينا 3 حلقات مركزها $z_0=0$ وفي كل منها $f(z)$ تحليلية:

a) $|z|<1$

b) $1<|z|<2$

c) $|z|>2$

ولكي نجد سلسلة لوران للدالة $f(z)$ في كل من هذه الحلقات سوف نحلل $f(z)$ لمجموع كسرين وبالتالي نكتب الآتي:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}$$

ملاحظة: متسلسلة لوران تكون مطلوبة على شكل حلقات أو دوائر تعدة المركز ولا تحوي نقاط شاذة.

[a] داخل دائرة $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z} \quad (A)$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots \quad ; \quad |z|<1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots \quad ; \quad \left|\frac{z}{2}\right|<1 \quad (2)$$

نعوض ① و ② في ★

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2-z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^4}{16}-(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=\frac{-1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+\cdots$$

[b] داخل الحلقة $1<|z|<2$

لدينا السلسلة ② متقاربة داخل الحلقة والسلسلة ① متباعدة عندما $|z|>1$ لذلك نكتب (★) :

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad (A\star)$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots \quad ; \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1 \quad (3)$$

نعوض ② ، ③ في ★ ★

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ج) السلسلتان $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z+2}$ متباعدتان خارج الدائرة $|z|=2$

نضع:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{z}\left[1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\dots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right]$$

$$f(z)=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\dots$$

هذا المثال يثبت أنه من أجل نفس الدالة فإن سلسلة لوران تملك شكل مختلف باختلاف الحلقات.

2) نسمي الدالة $f(z)$ في سلسلة لوران حيث:

$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ في جوار نقاطها الشاذة

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

النقاط الشاذة $z_1=1$, $z_2=2$

أ) في جوار $z_1=1$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1+1-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{-1}{1-(z-1)}$$

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\left(1+(z-1)+(z-1)^2+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z_0 = 2$ في جوار

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+2-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = 1 - (z-2) + (z-2)^2 + \cdots$$

ومنه:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n$$

السؤال الثاني:

أوجد سلسلة تايلور للدوال الآتية وأوجد نصف قطرها.

(1) $\ln(2-z)$ بقوى z $(z_0 = 0)$

$$f(z) = \ln(2-z) \Rightarrow f(0) = \ln(2)$$

$$f'(z) = \frac{-1}{2-z} \Rightarrow f'(0) = \frac{-1}{2}$$

$$f''(z) = \frac{1}{(2-z)^2} \Rightarrow f''(0) = \frac{1}{2^2}$$

$$f'''(z) = \frac{2(2-z)}{(2-z)^4} = \frac{2}{(2-z)^3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{2^2}$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{6(2-z)^2}{(2-z)^6} = \frac{6}{(2-z)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{6}{2^4}$$

$$\ln(2-z) = \ln 2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2^2}\frac{z^2}{2!} + \frac{1}{2^3}\frac{z^3}{3!} + \frac{6}{2^4}\frac{z^4}{4!} + \cdots$$

(2) $\dfrac{z+1}{z^2+4z-5}$ بقوى z

بإجراء التشتت أو بتفريق الكسر:

$$\frac{z+1}{z^2+4z-5} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -(1+z+z^2+\dots)$$

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{5}} = \frac{1}{5}\left[1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{5^2}-\dots+\frac{(-1)^n z^n}{5^n}\right]$$

وبالتالي

$$\frac{z+1}{z^2+4z-5} = \frac{2}{15}\left[1-\frac{z}{5}+\frac{z^2}{5^2}-\dots+\frac{(-1)^n z^n}{5^n}\right] + \frac{1}{3}\left[1+z+z^2+\dots\right]$$

أقرب النقاط إلى $z=0$ هي $1 \Leftarrow R=1$

(3) $\frac{1}{3z+1}$ بقوى $z+2$

$$\frac{1}{3z+1} = \frac{1}{3(z+2-2)+1} = \frac{1}{3(z+2)-5}$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}(z+2)} = -\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\frac{3^2}{5^2}(z+2)^2+\frac{3^3}{5^3}(z+2)^3+\dots\right]$$

ملاحظة: بالنسبة لمتسلسلة قوى فإنّ نصف قطر التقارب هي القيمة التي تحقق: $|z-a|<R$

[أي $|z-a|<1$]

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L' = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}} \right| = \frac{3}{5}$$

بالتالي نكون في:

$$L'|z-a| < 1$$

$$\frac{3}{5}|z+2| < 1$$

$$|z+2| < \frac{5}{3}$$ ← نصف قطر التقارب

السؤال الثالث:

أوجد منطقة تقارب السلاسل الآتية:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n \cdot z^n}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{-n-1}|}{|C_{-n}|} \overset{\lim}{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{(1-i)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1-i}\right| = \lim_{n\to\infty} |1-i|^{-1} = (\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ←

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$$

$$C_{-n} = \frac{1}{\cos in} = (\cosh(n))^{-1}$$

$$C_{-n-1} = \frac{1}{\cos i(n+1)} = (\cosh(n+1))^{-1}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cosh(n+1)}{\cosh(n)}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(n+1)}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^{n+1} + e^{-n-1}}$$

نضرب البسط والمقام بـ e^{-n}

$$\Rightarrow r = \frac{1}{e} = e^{-r}$$

$|z| < e^{-1}$ منطقة تقارب.

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i n\right)(z+1+i)^n$$

$$C_n = \frac{1}{n} + in \quad , \quad C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)} + i(n+1)$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1+in^2}{n}}{\frac{1+(n+1)^2 i}{(n+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+in^2)}{n(1+(n+1)^2 i)} \right| = 1$$

$|z+1+i| < 1$ منطقة تقارب السلسلة.

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$$

$$\Rightarrow C_{-n} = n \quad , \quad C_{-n-1} = n+1$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{-n-1}}{C_{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$$

$\Leftarrow$ $|z+1-i| < 1$ منطقة تقارب.

$C_n = n$, $C_{n+1} = n+1$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{r\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1$$

$\Rightarrow$ السلسلة متقاربة بشكل مكان

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أصفار الدالة :

لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية في النقطة z_0

يقال عن النقطة z_0 إنها صفر الدالة $f(z)$ من الرتبة n إذا تحقق أنّه :

$$f(z_0), f'(z_0), f''(z_0), \dots f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

ملاحظة : عندما $n=1$ بالتالي : z_0 تسمى صفر بسيط

مثال [1]: أوجد أصفار الدالة $f(z) = 1 + \cos z$ وأوجد مرتبتها.

الحل :

$$f(z) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \cos z = 0$$

$$\Rightarrow \cos z = -1$$

$$\Rightarrow z_n = (2n+1)\pi \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$f'(z) = -\sin z \Rightarrow f'(z_n) = -\sin((2n+1)\pi) = 0$$

$$f''(z) = -\cos(z) \Rightarrow -\cos((2n+1)\pi) = 1 \neq 0$$

$$f''(z_n) =$$

وبالتالي $z_n = (2n+1)\pi$ أصفار من الرتبة الثانية حيث :

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مثال [2]: أوجد أصفار الدالة $f(z) = 1 - e^z$

$$1 - e^z = 0$$

$$-e^z = -1$$

$$\Rightarrow e^z = 1 \Rightarrow e^z = e^{2n\pi i} \Rightarrow z_n = 2n\pi i \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لتحديد المرتبة نوجد الاشتقاق :

$$f'(z) = -e^{z} \Rightarrow f'(z_n) = -e^{2\pi i n}$$

$$= -e^{2} = -[\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n] = -1 \neq 0$$

$\Leftarrow z_n$ هو صفر بسيط للدالة.

نظرية : النقطة z_0 هي صفر من المرتبة n للدالة $f(z)$ التحليلية في z_0 إذا وفقط إذا كان في بعض جوار هذه النقطة تحقق العبارة الآتية :

$$f(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$$

حيث $\varphi(z)$ تحليلية في z_0 و $\varphi(z_0) \neq 0$

مثال ①: أوجد أصفار الدالة :

$$f(z) = (z^2+1)^3 \, \mathrm{Sh}\, z$$

الحل :

$$f(z) = 0 \Rightarrow (z^2+1)^3 = 0$$

$$z^2 = -1 \Rightarrow z^2 = i^2$$

$$z_1 = i \qquad z_2 = -i$$

$$\mathrm{Sh}\, z = 0 \Rightarrow z = n\pi i \; ; \; n = 0, \pm 1, \dots$$

من أجل $z = -i$

$$f(z) = (z+i)^3 \cdot (z-i)^3 \cdot \mathrm{Sh}\, z = (z+i)^3 \cdot \varphi(z)$$

$\varphi(z)$ دالة كلية في النقطة $z = -i$

$\varphi(-i) = 8i \sin(-i) = -8 \sin 1 \neq 0 \Rightarrow$

$z = -i$ صفر من المرتبة الثالثة

من أجل $z = i$

$$f(z) = \underbrace{(z-i)^3 \cdot (z+1)^3 \sin z}_{\varphi(z)}$$

نفس الملاحظة السابقة نجد $z_1 = -i$ صفر من المرتبة الثالثة

ولنبحث في مرتبة $z = n\pi i$ ؛

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

لدينا:

$$f'(z) = 3(z^2+1)^2 \, 2z \sin z + \cos z (z^2+1)^3$$

$$= 6z(z^2+1)^2 \sin z + \cos z (z^2+1)^3$$

$f'(n\pi i) \neq 0 \Rightarrow$

$z = n\pi i$ صفر بسيط.

مثال (2):

أوجد مرتبة الصفر $z = 0$ للدالة:

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}$$

الحل: لدينا $\sin z$ حسب تايلور حول $z_0 = 0$

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)} =$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots}$$

$$= \frac{z^8}{z^3\left[\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} \cdots\right]} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!}}$$

$$= z^5 \varphi(z)$$

حيث :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \cdots}$$

و $\varphi(z)$ كثيرة في $z_0 = 0$ و $\varphi(0) = 6 \neq 0$

وبالتالي $z_0 = 0$ صفر للدالة $f(z)$ من المرتبة الخامسة.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة