كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة :التاسعة/نظري/د .لمى رزوق

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

طرائق البرهان

Methods of Proof

تتنوع أساليب البرهان على صحة أو خطأ القضايا في حياتنا حسب نوع القضية، فمثلاً القضية "يتجمد الماء بالبرودة " صائبة والبرهان على ذلك يتم بالتجربة والمشاهدة ومـــن هنا يظهر ما يسمى **بالبرهان التجريبي** والقضية "المثلث المتساوي الأضلاع مجموع زواياه 180 درجة" هي قضية صائبة والبرهان على ذلك يتم قياساً للقاعدة التي تقول أن مجمـــــوع زوايــــا المثلث تساوى 180 درجة أي أننا حصلنا على نتيجة خاصة من حالة عامة ومن هنا يظهر مــــــا يسمى **بالبرهان القياسي**، وهناك بعض القضايا التي نقبل صوابها دون تعليل لأنه لا يوجد مــــــا يناقض صحتها ومثل هذه القضايا تسمى **مسلمات** Axioms فمثلاً القضية "من نقطة خارج مستقيم معلوم، يمر مستقيم واحد فقط يوازيه".

-المبرهنة في الرياضيات هي عبارة عن قضية رياضية صائبة-

-والبرهان هو إثبات منطقي لقضية ما-

وإنّ العديد من القضايا الرياضية التي يُطلب البرهان على صحتها تكون على صورة قضايا شرطية (إذا كان...فإنّ...)، وإن لم تكن كذلك، فإنّه غالباً ما نستطيع تحويلها إلى قضايا شرطية. وسندرس بعض **الطرائق الرئيسية للبرهان:**

1) طريقة البرهان المباشر Direct Proof:

تتم عن طريق الانتقال من المعطيات إلى المطلوب مباشرة، وذلك وفق المسلمات والتعاريف الرياضية والمنطقية. أي القضية تكون من الشكل: $p \to q$ ، حيث نفرض صواب المعطيات ونبرهن صواب المطلوب.

مثال1: باستخدام الطريقة المباشرة أثبت صحة ما يلي:

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \to p) \wedge r \Rightarrow q$$

الحل :

المعطيات :	$(\sim p \vee q)$	صواب
	$r \to p$	صواب
	r	صواب

المطلوب : q صواب

حيث أن r صواب، $r \to p$ صواب (من المعطيات)

من تعريف أداة الشرطية ينتج أن p صواب

و من تعريف أداة النفي: $\sim p$ يكون خطأ

وحيث أن $(\sim p \vee q)$ صواب (من المعطيات)

من تعريف أداة الفصل ينتج أن q صواب

بالتالي $(\sim p \vee q) \wedge (r \to p) \wedge r \Rightarrow q$ متحقق.

مثال2: باستخدام الطريقة المباشرة أثبت صحة ما يلي:

" إذا كان x عددا فرديا فإن x^2 عدد فردى "

الحل : نفرض القضية p : " x عدد فردى "

و القضية q : " x^2 عدد فردى "

إذاً نجد المعطيات هي أن القضية p صائبة، والمطلوب إثبات أن q صائبة. أي إثبات صحة اللزوم:

$p \Rightarrow q$.

حيث أن ، أى عدد فردى يمكن كتابته بالصورة $2n+1$ حيث n عدد صحيح

x عدد فردى $\Rightarrow x = 2n+1$

$\Rightarrow x^2 = (2n+1)^2$

$\Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$\Rightarrow x^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

$\Rightarrow x^2 = 2m + 1 \quad , \quad m = 2n^2 + 2n$

$\Rightarrow$ x^2 عدد فردى

بالتالي $p \Rightarrow q$ متحقق .

وظيفة1: باستخدام البرهان المباشر، برهن ما يلي "إذا كان العدد صحيحاً زوجياً، فإنّ مربعه عدد صحيح زوجي"

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

2) طريقة البرهان غير المباشر Indirect Proof:

تتم بفرض أنّ نفي المطلوب هو الصواب، ثم نستخدم أسلوب البرهان المباشر في إثبات أنّ نفي المعطيات يكون صواب. أي القضية تكون من الشكل: $\sim q \to \sim p$.

مثال3: باستخدام الطريقة غير المباشرة أثبت صحة ما يلي: $((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r)) \to r$

المعطيات : $p \,,\, q \,,\, p \vee q \to r$

المطلوب : r

الحل : باستخدام البرهان غير المباشر نحاول إثبات أن $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r))$.

نفرض أن نفي المطلوب يكون صواب أي إن $\sim r$ صواب. إذاً r خطأ.

من تعريف أداة الشرطية $p \vee q \to r$ وحيث أن r خطأ فإنه ينتج حالتين:

الحالة الأولى : $p \vee q \to r$ خاطئة وهذا يتحقق إذا كان $p \vee q$ صواب، ومن تعريف أداة الفصل فإنه توجد ثلاث احتمالات:

الاحتمال الأول : p صواب ، q صواب

الاحتمال الثاني : p صواب ، q خطأ

الاحتمال الثالث : p خطأ ، q صواب

وفي جميع هذه الاحتمالات ومن تعريف أداة الوصل فإن القضية $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r)$ خاطئة وبالتالي $\sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r))$ صائبة. إذاً في هذه الحالة $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r))$ يكون متحقق.

الحالة الثانية : $p \vee q \to r$ صائبة وهذا يتحقق إذا كان $p \vee q$ خطأ، ومن تعريف أداة الفصل فإن p خاطئة ، q خاطئة وبالتالي فإن القضية $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r)$ خاطئة. أي أنّ $\sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r))$ يكون صواب. إذاً في هذه الحالة أيضا فإن $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \to r))$ يكون متحقق.

مثال4: باستخدام الطريقة غير المباشرة أثبت صحة ما يلي:

"إذا كان x^2 عددا فرديا فإن x عدد فردى "

الحل : نفرض

القضية p : " x^2 عدد فردى "

و القضية q : " x عدد فردى "

المعطيات : القضية p صائبة

والمطلوب إثبات أنّ القضية q صائبة

أى إن المطلوب هو إثبات صحة $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان غيرالمباشر **نحاول إثبات صحة** $\sim q \Rightarrow \sim p$

وحيث أن

$\sim p$ **هو** القضية " x^2 **عدد غير فردى " أى إن " x^2 عدد زوجى "**

$\sim q$ **هو** القضية " x **عدد غير فردى " أى إن " x عدد زوجى "**

إذاً وفقاً لأسلوب البرهان غير المباشر، فإنّ المطلوب هو إثبات صحة:

x^2 **عدد زوجى** $\Rightarrow$ x **عدد زوجى**

وحيث أن ، أى عدد زوجى يمكن كتابته بالصورة $2n$ حيث n عدد صحيح .

x **عدد زوجى** $\Rightarrow \quad x = 2n$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4n^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2\left(2n^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 2m \qquad , \qquad m = 2n^2$$

$\Rightarrow$ x^2 **عدد زوجى**

إذاً: $\sim q \Rightarrow \sim p$ **متحقق .**

3) طريقة البرهان بالتناقض Proof by Contradiction :

تتم بأنّ نفرض جدلاً أنّ النتيجة المطلوبة q هي قضية خاطئة، وبالتالي يكون نفيها قضية صائبة، ثم نستخدم المعطيات لنجد أن الفرض الجدلي سيوقعنا في تناقض، فهو فرض خاطئ، وبالتالي تكون النتيجة q صائبة، والقضية p⟶q صائبة.

مثال5: باستخدام طريقة البرهان بالتناقض أثبت صحة ما يلي: $((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)) \rightarrow r$

المعطيات : $p \ , \ q \ , \ p \vee q \rightarrow r$

المطلوب : r

الحل :

المعطيات جميعها صواب

وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب يكون صواب، أى إن $\sim r$ صواب

r يكون خطأ.

وحيث أن $p \vee q \rightarrow r$ صواب (من المعطيات)

من تعريف أداة الشرطية ينتج أن $p \vee q$ خطأ

ومن تعريف أداة الفصل ينتج أن $p \ , \ q$ خطأ وهذا يناقض المعطيات التى تقـــول أن $p \ , \ q$ صواب وبالتالى الفرض يكون خطأ، أى إن r صواب.

مثال6: باستخدام طريقة البرهان بالتناقض أثبت صحة ما يلي:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \qquad \forall \ x > 0$$

الحل : المعطيات : $x > 0$

المطلوب إثبات أن : $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$

باستخدام البرهـــان بالتنـــاقض نفـــرض أن نفـــى المطلـــوب هـــو الصـــواب، أى نفـــرض

أن $\frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+2}$

وحيث أن $x > 0$ (من المعطيات). إذاً

$$x(x+2) \geq (x+1)(x+1) \Rightarrow x^2 + 2x \geq x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow 0 \geq 1$$

أى أننا حصلنا على تناقض، إذاً الفرض يكون خـــاطئ وبالتـــالى فـــإن الصـــواب هـــو أن $\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$.

وظيفة2: باستخدام البرهان بالتناقض، أعد حلّ المثال 4.

وظيفة3: باستخدام البرهان بالتناقض، برهن أنّه "إذا كان المثلث متساوي الأضلاع، فإنه يكون متساوي الزوايا".

4) طريقة البرهان بالتعويض:

تتم بدراسة كل حالات القضية، ويكون ذلك ممكناً عندما تكون مجموعة التعويض ذات عناصر معدودة وقليلة.

مثال على ذلك: التمرين 3 في المحاضرة السابقة.

مثال7: برهن ما يلي "إذا كان $n \epsilon \{1,2,3,4\}$، فإنّ $n^2 + n + 41$ عدداً أولياً"

الحل: بطريقة التعويض بالقيم كلها، نجد أن القضية صحيحة (**تدرّب على تعوضها بالتفصيل**).

5) طريقة البرهان بالمثال المعاكس Proof by Counter Example :

تتم بإعطاء مثال واحد على الأقل ينفي القضية التي نناقشها. وهذه الطريقة تكون فقط لإثبات خطأ قضية ما.

ملاحظة :

إذا أردنا إثبات قضية ما فعلينا برهنتها في جميع الحالات وليس بمثال خاص بينما إذا أردنا أن ننقضها أو نقيم الدليل على عــدم صحتها فيكفي إعطاء مثال معاكس واحد على الأقل .

مثال8: ناقش صحة ما يلي: $\forall\ x \in R \ ,\ |x| \neq 0$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = 0$ ، وحيث أن $|0| = 0$

بالتالي القضية المعطاة خاطئة.

مثال9: ناقش صحة القضية: $\forall\ x \in R \ ,\ x^2 > x$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال $x = \frac{1}{2}$ ، وحيث أن $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

بالتالي القضية المعطاة خاطئة.

مثال10: ناقش صحة القضية:

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الأضلاع"

الحل :

بإعطاء مثال معاكس نفرض المثلث abc فيه

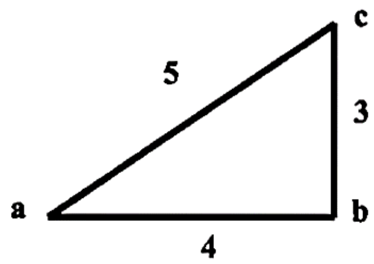
$ab = 4\ ,\ bc = 3\ ,\ ac = 5$

حيث أن

$$(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$$

المثلث قائم الزاوية ولكنه غير متساوي الأضلاع

بالتالي القضية المعطاة خاطئة.



وظيفة4: باستخدام البرهان بالمثال المعاكس، أثبت أنّ "إذا كان n عدداً طبيعياً، فإنّ 6n-1 عدداً أولياً".

6) البرهان بالاستقراء الرياضي Proof by Mathematical Induction:

يعتبر أسلوب قوي في برهان الكثير من النظريات والمسائل التي تتعلق بالأعداد الطبيعية (الأعداد الصحيحة الموجبة).

تعريف : إذا كانت $S \subset N$ حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية فإن S تسمى مجموعة استقرائية إذا تحقق

$$n \in S \quad \Rightarrow \quad n+1 \in S$$

مثال : المجموعات الآتية تمثل مجموعات استقرائية

1 - $A = \{1, 2, 3, \ldots \}$

2 - $B = \{6, 7, 8, \ldots \}$

3 - $C = \{n \in N \mid n \geq 9\}$

4 - $D = \{n+1 \mid n \in N\}$

والمجموعات الآتية تمثل مجموعات غير استقرائية

5 - $E = \{4, 6, 8, \ldots\}$

6 - $F = \{n \in N \mid 5 \leq n \leq 20000\}$

7 - $G = \{n^2+1 \mid n \in N\}$

8 - $S = \{k \in N \mid k \leq 2^{100}\}$

نظرية : مبدأ الاستقراء (الاستنتاج) الرياضي

إذا كانت $S \subset N$ تحقق الشرطين التاليين

1) - $1 \in S$

2) - $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

فإن $S = N$.

البرهان : المعطيات هى $S \subset N$ تحقق الشرط $1 \in S$ وتحقق الشـــروط $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ والمطلوب إثبات أن $S = N$. نفرض أن المجموعة D هى مكملة المجموعة S بالنســـبة إلى المجموعة الشاملة N ، أى إن $D = N - S$. إذاً يوجد حالتان فقط

الحالة الأولى: $D = \Phi$ وفى هذه الحالة تكون النظرية صحيحة لأن $S = N \Rightarrow D = \Phi$

الحالة الثانية : $D \neq \Phi$ وهذا يعنى أن المجموعة S محتواه بالكامل داخل المجموعة N ، أى إن

$$\exists \ k \in N \ : \ k \notin S$$

والآن نحاول إثبات خطأ هذا الإدعاء. حيث أن $1 \in S$ (من المعطيات)

نفرض أن $m \neq 1$ هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمى إلى المجموعة D، أى إن $m \notin S$ ، ومن تعريف الفرق بين مجموعتين فإن العدد الذى يسبق العدد m مباشرة ينتمــــى إلى S ، أى إن $m-1 \in S$ ولكن من الشرط الثانى من المعطيات نجد أن $m-1 \in S \Rightarrow m \in S$ وهـذا يؤدى إلى تناقض حيـــث $m \notin S$ وفى نفـــس الوقت $m \in S$ ومـــن ذلـــك نســـتنتج أن الفرض $D \neq \Phi$ فرض خاطئ أى إن $D = \Phi$ وبالتالى $S = N$.

ملاحظة:

1 - لكي نثبت صحة القضية $P(n)$ حيث $n \in N$ فإنه وفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضي، لابد من التحقق من الشرطين الآتيين معاً:

الشرط الأول: عند $n = 1$ فإن القضية $P(1)$ صائبة.

الشرط الثاني: بفرض أن $P(n)$ صائبة عند $n = k$ فإن ذلك يؤدي إلى أن القضية $P(k+1)$ صائبة أيضاً، أي إنّ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

2 - إذا لم يتحقق أحد الشرطين فإنّ $P(n)$ تكون قضية خاطئة.

3 - إذا كانت القضية $P(n)$ صائبة في حالة $n = \varphi$ (بدلاً من $n = 1$) وكان الشرط الثاني متحقق فإنّ القضية $P(n)$ تكون صائبة لجميع قيم $n \geq \varphi$.

مثال11: باستخدام الاستقراء الرياضي بيّن صحة القضية:

$$P(n) \equiv 1+2+3+\ \dots\ +n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in N$$

الحـــل :

<u>أولا : نثبت صحة القضية في حالة $n = 1$</u>

بوضع $n = 1$ فإن

الطرف الأيسر من القضية $P(n) = 1$

الطرف الأيمن من القضية $P(n) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

إذاً القضية $P(n)$ صائبة في حالة $n = 1$

<u>ثانيا : نفرض صحة القضية $P(n)$ في حالة $n = k$</u>

<u>ونحاول إثبات صحتها في حالة $n = k+1$</u>

أي نفرض أن

$$1+2+3+\ \dots\ +k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1+2+3+\ \dots\ +k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

والآن بإضافة $(k+1)$ إلى طرفي المعادلة (١) نحصل على

$$1+2+3+\ \dots\ +k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

إذاً القضية $P(n)$ صواب في حالة $n = k+1$.

إذاً وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضي فإن القضية $P(n)$ صائبة لكل $n \in N$.

مثال12: برهن صحة المساواة التالية : $\sum_{r=1}^{n} 2^r = 2(2^n - 1)$.

الحل :

لنفرض أن $p(n)$ هي العبارة المنطقية " $\sum_{r=1}^{n} 2^r = 2(2^n - 1)$ " .

1) إن $p(1)$ صحيحة . لأن $\sum_{r=1}^{1} 2^r = 2^1 = 2$ وفي الطرف الثاني لدينا

$$2(2^1 - 1) = 2(1) = 2$$

2) نفرض أن $p(k)$ صحيحة ، أي أن $\sum_{r=1}^{k} 2^r = 2(2^k - 1)$.

3) لنبرهن أن $p(k+1)$ صحيحة ، أي لنبرهن صحة العبارة $\sum_{r=1}^{k+1} 2^r = 2(2^{k+1} - 1)$:

$$\sum_{r=1}^{k+1} 2^r = \sum_{r=1}^{k} 2^r + 2^{k+1} = 2(2^k - 1) + 2^{k+1} = 2(2^{k+1} - 1)$$

وهو المطلوب .

مثال13: برهن بالاستقراء الرياضي صحة القضية

$$\mathbf{P(n) \equiv \quad 2^n \le n! \qquad \forall \quad n \ge 4}$$

الحل :

أولا : نثبت صحة القضية P (n) فى حالة n = 4

بوضع n = 4 فإن

الطرف الأيسر من القضية P (n) = 2^4 = 16

الطرف الأيمن من القضية P (n) = 4! = 24

$4! \ge 2^4$ وبالتالى القضية P (n) صواب فى حالة n=4

ثانيا : نفرض صحة القضية $P(n)$ فى حالة $n = k \geq 4$

ونحاول إثبات صحته فى حالة $n = k + 1$

أى نفرض أن $2^k \leq k!$ ونحاول إثبات ان $2^{k+1} \leq (k+1)!$ من خـــواص المتباينات

$$k \geq 4 \quad \Rightarrow \quad k+1 > 4 > 2 \quad \Rightarrow \quad 2 < k+1$$

والآن من الفرض

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \leq 2(k!) \leq (k+1)(k!) = (k+1)!$$

إذاً القضية $P(n)$ صواب فى حالة $n = k + 1$.

إذاً وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن القضية $P(n)$ صواب لكل $n \geq 4$.

وظيفة5: برهن بالاستقراء الرياضي صحة القضية: ((العدد 3^n-1 يقبل القسمة على 2 لكلّ $n \in N$))

ازرعوا المحبة في قلوبكم والمعرفة في عقولكم
فهي بالحب تسمو وبالعلم تبنى

د. لما رزوق