كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : جبر المنطق

المحاضرة :٧+٨/نظري/د.لمى رزوق

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

٥

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المنطق من المرتبة الأولى

First-Order Logic (FOL)

تعلمنا في منطق القضايا (وهو منطق المرتبة صفر) أنّ المتغيرات تمثّل جملًا كاملة، تُسمى المتغيرات المنطقية (الإسنادية أو القضوية) يرمز لها عادةً بأحرف مثل p,q,r، وتأخذ إحدى القيمتين 1 أو 0 فقط. ولا يوجد في الجملة بنية داخلية تعبّر عن الخصائص. ما يهتم بهذه البنية هو منطق المرتبة الأولى الذي يُعتبر أكثر قوة من المنطق الإسنادي و أقرب للغة الطبيعية.

✓ما هو منطق المرتبة الأولى FOL ؟

هو نظام منطقي رياضي يسمح بالتعبير الدقيق عن العبارات التي تتضمن **الكائنات** و**الخصائص** و**العلاقات**، وهو يمثل امتدادًا لمنطق القضايا بتقديم مفاهيم جديدة **كالمتغيرات** و**الكمّيات**. ويُستخدم على نطاق واسع في مجالات مثل الرياضيات والفلسفة والذكاء الاصطناعي .

✓مكوّناته:

الكائنات \الأشياء Objects

1. الثوابت:(Constants)

- وهي القيم التي لا تتغير خلال المسألة تشير إلى **أشخاص أو كيانات محددة**.
- نرمز لها عادة بأحرف صغيرة من بداية الأبجدية a, b, c

2. المتغيرات:(Variables)

- رموز تشير إلى **كائنات غير محددة**.
- نرمز لها عادة بأحرف صغيرة من نهاية الأبجدية x, y, z

العلاقات والروابط بين الكائنات:

3. الروابط المنطقية:(Connectives)

نفس روابط منطق القضايا ¬ ، ∧، ∨، →، ↔

4. الدّوال \التوابع:(Functions)

- رموز تشير إلى **علاقات تربط كائنات ببعضها** .
- دالة تأخذ مدخلات وتعطي مخرجات.

- لكل دالة "عدد محدد" للمدخلات.
- أمثلة:
  - father(x) أو أب (x) أو f (x) : دالة تأخذ شخصًا x وتعطي أباه.
  - sum(x,y) أو مجموع(x,y) أو f (x,y): دالة تأخذ عددين x,y وتعطي مجموعهما.
- نرمز لها عادة بأحرف صغيرة f, g, h

5. العلاقات المسندة\المسندات \المحمولات :(Predicates)

- تعمل على إسناد\حمل الصفات للكائنات أو ربط العلاقات بينها.
- لكل رابط إسنادي "عدد محدد" للمدخلات.
- أمثلة:
  - Human(x) أو H (x): x له خاصية "الإنسانية" (علاقة أحادية).
  - Loves(x, y) أو L (x, y): العلاقة "x يحب y " تربط بين x و y (علاقة ثنائية).
  - Give(x, y,z) أو G (x, y,z): العلاقة "x أعطى y لـz" (علاقة ثلاثية).
- نرمز لها عادة بأحرف كبيرة P, Q, R

المكمّمات\أدوات الكم\ المسوّرات (Quantifiers)

- أدوات تسمح لنا بالتكلم عن **كمية** الكائنات التي تحقق خاصية ما.

6. المكمم الكلي (المقياس الشامل)∀ : (Universal Quantifier)

- $\forall x, P(x)$ تعني: "لكل x، فإن P(x) صحيحة". أو "كل x لديه الخاصية P ".
- بمعنى آخر: العبارة محققة دوماً من أجل كل قيم المتغير x .
- مثال:

"كل إنسان فانٍ."

$$\forall x, Human(x) \rightarrow Mortal(x)$$

7. المكمم الوجودي\ المقياس الجزئي ∃ : (Existential Quantifier)

- $\exists x; P(x)$ تعني: "يوجد x على الأقل بحيث P(x) صحيحة"، أو "هناك x لديه الخاصية P ".
- بمعنى آخر: العبارة محققة من أجل بعض قيم المتغير x .
- مثال:

"يوجد إنسان حكيم."

$$\exists x; (Human(x) \wedge Wiser(x))$$

ملاحظات:

- مع ∀ نستخدم غالبًا → لأننا نتكلم عن **شرط الزوم\ الزوم** ، مثال:" إذا كان x إنسانًا، فهو فانٍ."
- مع ∃ نستخدم غالبًا ∧ لأننا نؤكد **وجود** كائن يحقق الخاصيتين **معًا**، مثال: "يوجد x وهو إنسان وحكيم."

✓ نفي القضايا المكمّمة\ المسوّرة Negation of Quantified propositions

❖ نفي القضية المُسوَّرة كُليًا:

$$\sim[\forall x \in D , p(x)] \equiv \exists x \in D ; \sim p(x)$$

❖ نفي القضية المُسوَّرة جزئيًا:

$$\sim[\exists x \in D ; p(x)] \equiv \forall x \in D , \sim p(x)$$

✓أمثلة (تحويل عبارات لجمل منطقية):

كن حريصاً عند تحويل العبارات لجمل منطقية على:

- فهم المعنى.
- تصنيف أجزاء العبارة (تحديد النوع فيما إذا كان ثابت أم متغير، دالة أم مسند، كم كلي أو جزئي...).

1. **كل الناس فانين:**

∀x, Human(x) → Mortal(x)

2. **يوجد شخص يحب مريم:**

∃x; Loves(x, Mariam)

3. **كل إنسان يحب أباه:**

∀x, [Human(x) → Loves(x, father(x))]

4. **أحمد أطول من خالد:**

Taller (Ahmed, Khaled)

5. **كل عدد له عدد أكبر منه:**

∀x, ∃y; (y>x)

6. **يوجد عدد أصغر من جميع الأعداد:**

∃x; ∀y, (x≤y)

7. **كل طلاب جامعة هارفرد أذكياء:**

∀x, [Student(x) ∧ At(x, Harvard)] → Smart(x)

8. **لا أحد يحب الكذابين:**

∀x, ∀y, ((Human (x)∧ Liar (y)) → ¬ Loves (x,y))

أو:

$\neg\exists x; \exists y; (Human(x) \wedge Liar(y) \wedge Loves(x,y))$

9. **Ahmad has a sister who is a computer scientist**

$\exists x; Sister(x, Ahmad) \wedge CS(x)$

10. **Some birds can't fly**

$\exists x; bird(x) \wedge \neg fly(x)$

11. **Not everyone likes ice-cream**(=someone doesn't like icecream)

$\exists x ; \neg Likes(x, ice\text{-}cream)$

✔ **تمرين: نفي قضايا:**

انفِ كل قضية فيما يأتي وعين قيمة ال للقضية ولنفيها:

القضية	قيمة حقيقة القضية	نفي القضية	قيمة حقيقة القضية المنفية
$\exists\, x \in \mathbb{N} ; 3x+5=8$	صائبة	$\forall\, x \in \mathbb{N},\ 3x+5 \neq 8$	خاطئة
$\exists\, x \in \mathbb{N} ; 2x-3=4$	خاطئة	$\forall\, x \in \mathbb{N}, 2x-3 \neq 4$	صائبة
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$	صائبة	$\exists\, x \in \mathbb{R} ;\ x^2 < 0$	خاطئة
$\forall\, x \in [0,1],\ x^2 \leq x$	صائبة	$\exists x \in [0,1] ; x^2 > x$	خاطئة
$\exists\, x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 0$	صائبة	$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$	خاطئة
$\forall\, x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 5$	خاطئة	$\exists\, x \in \mathbb{R} ; x \leq -2 \ or\ x > 5$	صائبة

ملاحظة: في منطق المرتبة الأولى، يمكن استخدام القوانين وقواعد الاستدلال نفسها المستخدمة في منطق القضايا.

✔ **تمرين: التمثيل المنطقي:**

1- مثّل العبارة التالية منطقياً:

(لا يوجد فطر muchroom أحمر red سام poisonous)

الحلّ: يمكن تمثيلها بإحدى القضايا التالية (المتكافئة):

- $\neg\exists x; [Mush(x) \wedge red(x) \wedge pois(x)]$
- $\equiv \forall x \neg [Mush(x) \wedge red(x) \wedge pois(x)] \equiv \forall x [\neg Mush(x) \vee \neg red(x) \vee \neg pois(x)]$ (حسب ديمورغان)
- $\equiv \forall x [\neg(Mush(x) \wedge red(x)) \vee \neg pois(x)] \equiv \forall x [Mush(x) \wedge red(x) \rightarrow \neg pois(x)]$

2- مثّل ما يلي منطقياً:

- سقراط إنسان.
- كل إنسان فانٍ.
- إذاً، سقراط فانٍ.

الحلّ: التمثيل في منطق المرتبة الأولى:

- الثوابت : s - سقراط.
- الروابط: x هو إنسان $Human(x)$، وهو فانٍ $Mortal(x)$.
- الفرضية 1: $Human(s)$
- الفرضية 2: "لكل x ، إذا كان x إنسانًا، فإن x فانٍ."، تُكتب :

$$\forall x\ Human(x) \rightarrow Mortal(x)$$

النتيجة: $Mortal(s)$

إنّ **منطق القضايا** يهتم بالجمل ككل (صحيح/خطأ). **أمّا المنطق FOL** يهتم بوصف الأشياء والخصائص والعلاقات والكمّيات. وباختصار: يوضح الجدول التالي بعض الفروق بينهما:

الجانب	منطق القضايا	المنطق من المرتبة الأولى
التعقيد	بسيط	أكثر تعقيدًا
القوة التعبيرية	ضعيف	قوي جدًا
المتغيرات العامة	لا يوجد	يوجد
الكمّيات	لا يوجد	يوجد($\exists$، $\forall$)
العلاقات بين الكائنات	لا يمكن التعبير عنها	يمكن التعبير عنها

✓ خواص:

1. $(\forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}), \mathrm{P}(x, y) \equiv (\forall\ \boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{x}), \mathrm{P}(x, y) \equiv \forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathrm{P}(x, y)$ (المكمم الكلي تبديلي)
2. $(\exists\ \boldsymbol{x}\ ; \exists\ \boldsymbol{y}); \mathrm{P}(x, y) \equiv (\exists\ \boldsymbol{y};\ \exists\ \boldsymbol{x}); \mathrm{P}(x, y) \equiv \exists\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y};\ \mathrm{P}(x, y)$ (المكمم الجزئي تبديلي)
3. $\forall\ \boldsymbol{x}, \exists\ \boldsymbol{y}; \mathrm{P}(x, y) \neq \exists\ \boldsymbol{y};\ \forall \boldsymbol{x}, \mathrm{P}(x, y)$ (المكمم الكلي ليس تبديلي مع المكمم الجزئي)
4. **المكمم الكلي توزيعي على أداة الوصل $\wedge$ أمّا المكمم الجزئي غير توزيعي عليها:**

$$\forall x, (P(x) \wedge\ Q(x)) \equiv (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$$

$$\exists x;\ (P(x) \wedge\ Q(x)) \not\equiv (\exists x;\ P(x)) \wedge (\exists x;\ Q(x))$$

5. **المكمم الكلي غيرتوزيعي على أداة الفصل $\vee$ أمّا المكمم الجزئي توزيعي عليها:**

$$\forall x, (P(x) \vee\ Q(x)) \not\equiv (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$$

$$\exists x;\ (P(x) \vee\ Q(x)) \equiv (\exists x;\ P(x)) \vee (\exists x;\ Q(x))$$

✓ تعاريف:

- **الدالة الافتراضية** $\mathrm{P}(x)$ هي العبارة المنطقية المفتوحة التي تحتوي على متغير(بسيطة) أو أكثر من متغير(مركّبة)، وتصبح **قضية** عندما تأخذ متغيراتها قيماً معينة.

  مثال: لتكن لدينا العبارة المفتوحة $\mathrm{P}(x, y, z)$ تمثل المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$، عندئذ:

  $\mathrm{P}(3,4,5)$ هي قضية منطقية صحيحة، في حين $\mathrm{P}(1,2,3)$ قضية منطقية خاطئة.

- مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير هي **مجموعة التعويض** D.
- نسمي مجموعة قيم المتغيرات التي تجعل الدالة الافتراضية P صحيحة **بمجموعة الصّواب** $\mathbf{T_P}$، ونكتب:

$$\mathbf{T_P} = \{\ \mathbf{c}\ ; \boldsymbol{P}(\boldsymbol{c}) \equiv \boldsymbol{True}\}$$

مثال: لتكن لدينا العبارة $\mathrm{P}(x)$ هي" $x - 2 < 5$ " من أجل $D = \mathcal{R}$، عندئذٍ مجموعة الصّواب هي $\mathbf{T_P} =]-\infty, 7[$

ولتكن لدينا العبارة $Q(x)$ هي" $x^2 + 1 = 0$ " من أجل $D = \mathcal{R}$، عندئذٍ مجموعة الصّواب هي $\mathbf{T_P} = \emptyset$

ملاحظة1: الدالة الافتراضية ليس لها قيمة حقيقة "خطأ أو صواب" فهي عبارة مفتوحة، لكن عندما تُصبح قضية فهي تأخذ إحدى قيمتي الحقيقة.

ملاحظة2: عند وجود مكمم لكل متغير في العبارة المنطقية (كلي أو جزئي)، فإنّ الدالة الافتراضية تصبح قضية ولها قيمة حقيقة.

✓ تمرين1: لتكن لدينا $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ، وضح فيما إذا كانت العبارة تمثل قضية (واجداً قيمة الحقيقة) أم دالة افتراضية (واجداً مجموعة الصّواب):

- العبارة " $\forall x \in A, \exists y \in A: x + y < 8$" هي دالة افتراضية في متغيرين مسبوقين بمكممين، فهي تمثل قضية، ونلاحظ أن قيمة الحقيقة لها هي "الصواب"(حيث لكل قيم $x \in A$ يوجد $y \in A$ بحيث تتحقق المتراجحة) .

- العبارة " $\forall y \in A: x + y < 8$" هي دالة افتراضية في متغيرين، واحد منهما فقط مسبوق بمكمم، فهي تمثل دالة افتراضية للمتغير x ، ونلاحظ أن المتراجحة تتحقق من أجل كل قيم $y \in A$ فقط عندما $x = 1$ ، بالتالي مجموعة الصّواب $\mathbf{T_P} = \{\mathbf{1}\}$.

✓ **تمرين2: إيجاد قيمة الحقيقة للعبارة المنطقية البسيطة و مجموعة الصّواب لها:**

- العبارة الأولى: $\forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{n} + \mathbf{3} > \mathbf{2}$

العبارة الأولى صحيحة\صائبة، لأنه مهما يكن العدد الطبيعي $\boldsymbol{n}$ فإنّ:

$$\boldsymbol{n} + \mathbf{3} \in \{3,4,5,6, \dots\}$$

نلاحظ أنّ جميع العناصر الناتجة أكبر من 2، وتكون مجموعة الصواب هي $\mathbf{T_P} = \boldsymbol{N}$.

- العبارة الثانية: $\forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{n} + \mathbf{3} > \mathbf{6}$

العبارة الثانية خاطئة، لأنه يمكن أنّ يوجد عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ بحيث لا تتحقق المتراجحة $\boldsymbol{n} + \mathbf{3} > \mathbf{6}$ ، مثلاً عندما $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$ يكون $\boldsymbol{n} + \mathbf{3} = \mathbf{4}$ وهو عدد أصغر من 6، هنا مجموعة الصواب التي تكون من أجلها العبارة صحيحة هي $\mathbf{T_P} = \{4,5,6, \dots\}$.

- العبارة الثالثة: $\exists \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}; \boldsymbol{n} + \mathbf{3} < \mathbf{8}$

العبارة الثالثة صحيحة\صائبة، لأنه يوجد عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ يحقق المتراجحة $\boldsymbol{n} + \mathbf{3} < \mathbf{8}$ وذلك عندما:

$$\boldsymbol{n} \in \{1,2,3,4\} \neq \emptyset$$

أي تكون مجموعة الصّواب:

$$\mathbf{T_P} = \{n \in N: n + 3 < 8\} = \{1,2,3,4\} \neq \emptyset$$

- العبارة الرابعة: $\exists \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}; \boldsymbol{n} + \mathbf{3} < \mathbf{2}$

العبارة الرابعة خاطئة، لأنه لا يوجد عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ بحيث تتحقق المتراجحة $\boldsymbol{n} + \mathbf{3} < \mathbf{2}$، أي مجموعة الصّواب:

$$\mathbf{T_P} = \{n \in N: n + 3 < 2\} = \emptyset$$

ملاحظة: إذا كانت $\mathbf{P}(\boldsymbol{x})$ دالة افتراضية لمجموعة $\boldsymbol{D}$ ، فإنّ:

1-القضية $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ تكون صحيحة عندما تكون مجموعة الصواب هي نفسها مجموعة التعويض $(\mathbf{T_P} = \boldsymbol{D})$.

2-القضية $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ تكون خاطئة عندما تكون مجموعة الصواب ليست نفسها مجموعة التعويض $(\mathbf{T_P} \neq \boldsymbol{D})$.

3-القضية $\exists \boldsymbol{x};\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ تكون خاطئة عندما تكون مجموعة الصواب فارغة $(\mathbf{T_P} = \emptyset)$.

4- القضية $\exists \boldsymbol{x};\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ تكون صحيحة عندما تكون مجموعة الصواب غير خالية $(\mathbf{T_P} \neq \emptyset)$.

✓ **تمرين3: أوجد قيمة الحقيقة للعبارة المنطقية المركّبة:**

$$\exists \boldsymbol{n} \in \{1,2,3,4\}; (\boldsymbol{n}^2 \leq \mathbf{8}) \vee (\boldsymbol{n}^3 > \mathbf{30})$$

هذه العبارة صحيحة دوماً، لأنّها تركيب قضيتين $\vee$، ويكفي أن تكون واحدة منهما صحيحة من أجل بعض القيم، ونجد:

القضية الأولى $\boldsymbol{n}^2 \leq \mathbf{8}$ صحيحة من أجل بعض قيم $\boldsymbol{n}$ التي تنتمي للمجموعة $\{1,2,3,4\}$

$$1^2 \leq 8 \text{ و } 2^2 \leq 8$$

في حين نجد القضية الثانية $n^3 > 30$ صحيحة من أجل قيمة واحدة من مجموعة التعويض$\{1,2,3,4\}$

$$4^3 > 30$$

$\forall n \in \{1,2,3,4,5\}, (n^2 \leq 10) \rightarrow (n^3 < 25)$

هذه العبارة خاطئة، لأنّه بتعويض قيم n نجد:

n	$n^2 \leq 10$	$n^3 < 25$	$n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 25$
1	$1 \leq 10$ صواب	$1 < 25$ صواب	صواب
2	$4 \leq 10$ صواب	$8 < 25$ صواب	صواب
3	$9 \leq 10$ صواب	$27 < 25$ خطأ	خطأ
4	$16 \leq 10$ خطأ	$64 < 25$ خطأ	صواب
5	$25 \leq 10$ خطأ	$125 < 25$ خطأ	صواب

نلاحظ أنّ القضية لا تتحقق عندما $n = 3$ ، إذاً القضية خاطئة.

✔ **تمرين4: أوجد نفي القضية:**

" إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

p : " الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ "

q : " $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

فتكون القضية المعطاة بالشكل: $p \rightarrow q$

وحيث أن

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\sim q &\equiv \sim \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \sim \left(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \left(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

فيكون نفي القضية المعطاة بالشكل:

" الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فإن $|x - x_0| < \delta$ وأيضا $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ ".

د.لما رزوق

مكتبة A to Z
للخدمات الجامعية

مكتبة A to Z