كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك١

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

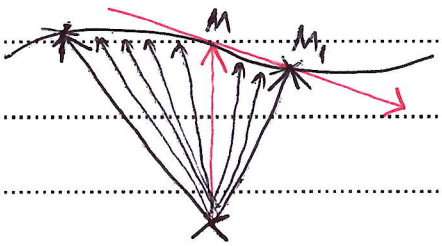
2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الحركة الخاضعة لقانون السطوح:

السرعة السطحية:

إن انتقال نقطة مادية من موقع M_0 إلى موقع M يجعل الشعاع $\overrightarrow{OM}$ الذي يمثل $\vec{r}(t)$ الموضع يمسح سطحاً كما في الشكل



بفرض يوجد النقطة في اللحظة t في M، وفي اللحظة $t+\Delta t$ في M_1 ⟸

ثم مسح سطح $\Delta\vec{\sigma}$ ⟸ $\vec{\sigma_1} = \vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}$

بفرض $\Delta t \to 0$

يقدر عندئذٍ تغير السطح $\Delta\vec{\sigma}$ خلال فترة Δt كتجه طوله نصف مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على $\vec{r}$ و $\Delta\vec{r}$ ويساوي $\vec{r}$ و $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \Delta\vec{r}) \Longleftarrow$$

$$\frac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\vec{r} \wedge \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) \Longleftarrow$$

يمثل السرعة السطحية الوسطى

وعندما $\Delta t \to 0$ يصبح $\frac{d\vec{r}}{dt}$ هي السرعة الخطية.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v})$$

أي يمثل نصف عزم متجاع السرعة.

* السرعة الخطية بالاحداثيات الديكارتية:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(yz' - y'z)\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}\right]$$

ملاحظة: في حالة حركة مستوية أي الحركة ضمن مستوي ما ونفرض ضمن مستوي xoy أي:

$$\omega = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[xy' - yx']\vec{k}$$

هنا يصبح متجاع السرعة الخطية محمول على oz.

* السرعة الخطية بالاحداثيات القطبية:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ r & 0 & 0 \\ r' & r\theta' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r^2 \theta' \vec{k}$$

حيث: $\vec{e_r} = \vec{I}$

$\vec{e_\theta} = \vec{J}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التسارع السطحي :

يساوي مشتق السرعة السطحية بالنسبة بالتسارع السطحي

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{v})'$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\vec{r}' \wedge \vec{v}}_{=0} + \vec{r} \wedge \vec{v}'\right] = \frac{1}{2}(\vec{r} \wedge \vec{\gamma})$$

حيث $\vec{r}$ شعاع التسارع

* التسارع السطحي بالاحداثيات الديكارتية :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

في الحركة المستوية يصبح :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (xy'' - yx'')\vec{k}$$

* التسارع السطحي بالاحداثيات القطبية :

$$\omega = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{k} \\ r & 0 & 0 \\ r'' - r\theta'^2 & r''\theta + 2r'\theta' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[r^2\theta'' + 2rr'\theta'\right]\vec{k} = \frac{r}{2}\left[r\theta'' + 2r'\theta'\right]\vec{k}$$

$$= \left(\frac{r}{2}\right)(\gamma_\theta)\vec{k}$$

γ_θ هي التسارع العامودي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحركة الخاضعة لقانون الطوح:

نقول عن حركة إنها خاضعة لقانون الطوح إذا كانت سرعتها السطحية ثابتة في الحركة المستوية

ومنه:

ديكارتياً: $W = \frac{1}{2}(xy' - x'y) = C$

قطبياً: $W = \frac{1}{2} r^2 \theta' = C$

C يدعى ثابت الطوح

تمرين: M نقطة تتحرك وفق معادلات: $x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

حيث $\rho^3 = kT$ و k ثابت.

برهن أنها خاضعة لقانون الطوح حول مبدأ الإحداثيات.

الحل:

$$W = \frac{1}{2}[xy' - x'y] = \frac{1}{2}\left[\rho\cos\theta\left[\rho'\sin\theta + \rho'\cos\theta\,\theta'\right] - \left[\rho'\cos\theta - \rho'\sin\theta\,\theta'\right]\rho\sin\theta\right]$$

$$= \frac{\rho}{2}[\rho'\theta'] = \frac{\rho^2\theta'}{2} = \frac{\sqrt[3]{k^2}\; t^{\frac{2}{3}}\; \sqrt[3]{k}\; \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}}{2} = \underbrace{\frac{k}{6}}_{\text{ثابت}}$$

$\Leftarrow$ خاضعة لقانون الطوح.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z