كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثامنة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

نعرف بداية الحلقة الإقليدية:

لتكن R حلقة صحيحة نقول بأنّ R هي حلقة إقليدية إذا وجد تابع ν يحقق:

$$\nu: R\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$$

(1) $\forall a,b\in R\setminus\{0\}$, $\nu(a)\leq\nu(ab)$

(2) $\forall a,b\in R$, $a\neq 0$, $\exists q,r\in R$:

$$b=aq+r$$

بحيث $r=0$ أو $\nu(r)<\nu(a)$

[1] أثبت أن $\mathbb{Z}$ هي حلقة إقليدية:

أولاً إن $\mathbb{Z}$ حلقة صحيحة فإذا عرفنا ν بالشكل:

$$\nu: \mathbb{Z}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$

$$n \longrightarrow |n|$$

لو جربنا:

(1) مهما يكن $a,b\in\mathbb{Z}$ إن $|a|\leq|ab|$

(2) من أجل أي عددين صحيحين a,b حيث أن $|a|<|b|$:

$$b=aq+n$$

أو $r=0$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

2) إذا كان F حقلاً فإن F[x] حلقة إقليدية

بداية إن F حقل ⇐ F حلقة صحيحة ⇐ F[x] حلقة صحيحة

نعرف ν بالشكل:

$\nu : F[x]\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}^+$

$\nu(f(x)) = \deg(f(x))$

$\forall f, g \in F[x]$ بحسب خوارزمية القسمة

فإنه:

$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$

$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$

$\Rightarrow \nu(r(x)) < \nu(g(x))$

3) إذا كانت R حلقة إقليدية و $a \in R\setminus\{0\}$

عندئذٍ $\nu(1) \le \nu(a)$ وأكثر من ذلك:

$\nu(1) = \nu(a) \iff a$ واحدة (أي قلوب مغرى)

الحل:

$\nu(1) \le \nu(1, a) = \nu(a)$

* إذا كانت a واحدة عندئذٍ يوجد b بحيث $ab = 1$

$\nu(a) \le \nu(ab) = \nu(1)$

ولكن: $\nu(1) \le \nu(a)$ بما سبق

بالتالي $\nu(1) = \nu(a)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بشكل مماثل نفرض أن $\nu(1) = \nu(a)$

عندئذٍ: $1 = aq + r$

حيث: $r = 0$ أو $\nu(r) < \nu(a) = \nu(1)$

ولكن $\nu(r) \geq \nu(1)$ لكل $r \neq 0$ أي $r = 0$

وبالتالي $1 = aq$ و a واحدة

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة