كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

لتكن R حلقة تبديلية بواحدة و I إيديال في R

برهن أن:

$$R[x]/I[x] \sim (R/I)[x]$$

حيث $I[x]$ مجموعة عناصرين $R[x]$ والتي أمثالها من I

الحل:

نعرف التطبيق: $g: R[x] \longrightarrow (R/I)[x]$

بالشكل التالي:

$$g(f(x)) = g(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$$
$$= (a_0 + I) + (a_1 + I)x + \cdots + (a_n + I)x^n$$

من أجل $f[x] \in R[x]$

أوجد: g معرف جيداً

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad ; \quad h(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x_i$$

عندئذٍ بالمطابقة نجد أن: $a_i = b_i$ $\forall i$ $1 \le i \le n$

وبالتالي:

$$(a_i + I) = (b_i + I) \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i + I)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + I)x^i$$
$$\Rightarrow g(f(x)) = g(h(x))$$

ثانياً: إن g تحقق برهن ملقة:

$$K(x)=\sum_{K=0}^{n} C_k x^K \quad , \quad h(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g(f(x)+h(x)) = g\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)$$

$$= g[(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n]$$

$$= (a_0+b_0+I)+(a_1+b_1+I)x+\cdots+(a_n+b_n+I)x^n$$

$$= (a_0+I)+(a_1+I)x+\cdots+(a_n+I)x^n+(b_0+I)+(b_1+I)x+\cdots+(b_n+I)x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(a_i+I)x^i + \sum_{i=0}^{n}(b_i+I)x^i$$

$$= g(f(x)) + g(h(x))$$

$$g(f(x).h(x)) = g[a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots]$$

$$= (a_0+I)(b_0+I)+[(a_0+I)(b_1+I)+(a_1+I)(b_0+I)]x + \cdots$$

$$= [(a_0+I)+(a_1+I)x+\cdots][(b_0+I)+(b_1+I)x+\cdots]$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(a_i+I)x^i \sum_{i=0}^{n}(b_i+I)x^i$$

$$= g(f(x))\,g(h(x))$$

إذن f غامر لأن:

$$\forall \sum_{i=0}^{n}(a_i+I)x^i \in (\mathbb{R}/I)[x] \Rightarrow$$

$$\exists f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , \quad g(f(x))=\sum_{i=0}^{n}(a_i+I)x^i$$

وبالتالي f غامر.

وحسب نظرية الإيزومورفيزم الأولى:

$$R[x]/\ker(g) \simeq (R/I)[x]$$

$$\ker(g) = \{f(x) \in R[x] ;\ g(f(x)) = I\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i + I)x^i = I$$

$$\Rightarrow a_i + I = I \quad \forall i = \overline{0,n}$$

$$\Rightarrow a_i \in I \quad \forall i = \overline{0,n}$$

$$\Rightarrow f(x) \in I[x] \Rightarrow \ker(g) \subset I[x]$$

ولدينا:

$$g(I) = I \Rightarrow I[x] \subset \ker(g) \Rightarrow \ker(g) = I[x]$$

$$\Leftrightarrow R[x]/I[x] \simeq (R/I)[x]$$

وهو المطلوب

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة