كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

السؤال الأول:

لتكن $\mathbb{Z}^*$ أسرة الأعداد الصحيحة الموجبة ولتكن R حلقة الواحدة $R[x]$ أسرة كل الدوال $f: \mathbb{Z}^+ \to R$ بحيث أن $f(n)=0$ لأجل كل عدد طبيعي باستثناء عدد محدود من الأعداد الطبيعية نعرف على أسرة الدوال $R[x]$ ما يلي:

$$(f+g)(n) = f(n)+g(n)$$

$$(f.g)(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\,g(n-m)$$

تحقق أن $(R[x],+,.)$ حلقة

الحل:

① $(R[x],+)$ زمرة تبديلية

بداية إن $g, f \in R[x]$ فإن $f+g \in R[x]$ لأنه إذا كانت $f(x)=0$ و $g(x)=0$ لأجل $n \in \mathbb{Z}$ باستثناء عدد محدد من الأعداد الطبيعية $f(n)+g(n) \in R[x]$

- إن الجمع تجميعي في $R[x]$ لأنه:

$$\forall f, g, h \in R[x] \; ; \; [f+(g+h)](n)$$

$$= f(x)\,(g(n)+h(n))$$

$$= f(n)+g(n)+h(n)$$

لأن الجمع تجميعي من الطرف اليمين في R الحلقة فرضاً

$[f+(g+h)](n) = [f(n)+g(n)] + h(n)$

$= [(f+g)+h](n)$

الجمع تبديلي على $R[x]$ لأنّ:

$\forall f,g \in R[x]$

$\Rightarrow [f+g](n) = g(n)+f(n) = (g+f)n$

نعرف التطبيق:

$O: \mathbb{Z}^+ \to R$

$O(n) = 0 \; , \; n \in \mathbb{Z}^+ \qquad O \in R[x]$

$\forall f \in R[x] \Rightarrow (f+O)(n) = f(n) + O(n)$

$= f(n) + 0$

$= f(n)$

بما أن الجمع تبديلي إذاً O المعرف أعلاه هو حيادي الجمع

نعرف التطبيق لكل من $f \in R[x]$

$f: \mathbb{Z}^+ \to R$

$(-f)(n) = -f(n)$

بما أن $f(n)=0$ لكل $n \in \mathbb{Z}^+$ باستثناء عدد محدود من الأعداد الطبيعية إذاً $-f(x)$ يحقق ذلك $-f \in R[x]$

إذن $-f(n)$ هو النظير الجمعي لـ $f(n)$ في الحلقة R فرضاً وبالتالي:

$[f+(-f)](n) = f(n) - f(n) = 0$

إذاً $-f$ هو النظير الجمعي لـ f في $R[x]$ مما سبق $(R[x], +)$ زمرة تبديلية:

الآن عملية الجداء :

$$(f.g)(x) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n-m)$$

لأن الجمع $\sum$ منتهية

صورة أي ~~...~~ عدد من $\mathbb{Z}^+$ وفق f, g هي الصفر باستثناء عدد منتهٍ من الأعداد الطبيعية.

الجداء تجميعي لأنه :

$$f(g.h)(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)(g.h)(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} f(n) \sum_{k=0}^{n-m} g(k)\, h(m-k)$$

(تحقق من التجميعية وظيفة)

الجداء توزيعي لأن :

$$\forall\ f, g, h \in R[x] \Rightarrow$$

$$[f.(g+h)](n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)(g+h)(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} f(m)\,[g(n-m) + h(n-m)]$$

$$= \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n-m) + \sum_{m=0}^{n} f(m)\, h(n-m) = (f.g + f.h)(n)$$

$(R[x], +, .)$ حلقة

انتهت المحاضرة.