كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المويدولات (Modules):

ليكن R حلقة كيفية بواحدية ليست من الضروري أن تكون تبديلية.

1) نقول أن R مودول أيسر وحدته M إذا تحقق الشروط الآتية:

① M زمرة تبديلية مزودة بعانون تشكيل خارجي (جداء سلمي) يحقق الشروط التالية:

$$R \times M \to M$$
$$(a, m) \to am \in M$$

بحيث تحقق الخواص التالية:

$\forall a, b \in R, \quad \forall m, n \in M$

$a(m+n) = am + an$ (a₁)

$(a+b)m = am + bm$ (b₁)

$(ab)m = a(bm)$ (c₁)

$1.m = m$ (d₁)

2) M هو R مودول أيمن إذا كان الجداء الخارجي (الجداء السلمي) وفقاً للشروط التالية:

$$M \times R \to M$$
$$(m, a) \to ma \in M$$

بحيث يحقق الخواص التالية:

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$(m+n)a = ma + na$ (9₂)

$m(a+b) = ma + mb$ (b₂)

$m(a.b) = (m.a).b$ (c₂)

$m.1 = m$ (d₂)

نقول بأن المودول A هو مودول ثنائي الجانب إذا كان مودول أيسر ومودول أيمن.

مثال: إذا كانت R حلقة تبديلية أي أن R مودول أيسر على نفسها R فإن R مودول أيمن في حالة كانت:

$\forall r \in R, m \in M$ بحيث $rm = mr$

حيث (c₂) يحتاج فقط لإثبات تحقق الشرط:

$m(a.b) = m(b.a) = (b.a)m = b(am) = (am)b = (ma).b$

تعريف: لتكن R حلقة وليكن M,N زمرتين تبديليتين R-مودول نقول أن التطبيق $f: M \to N$ أنه R هومومورفيزم مودولات إذا تحققت الشروط التالية:

1. $f(m_1+m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ $\forall m_1, m_2 \in M$
2. $f(am) = a f(m)$ $\forall a \in R, m \in M$

حيث f هو R هومومورفيزم مودولات من M إلى N فوق R

$\mathrm{Hom}_R(M,N)$ أي زمرة الهومومورفيزمات من M إلى N فوق R

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تابع مقدمة:

إذا كان $f: M \to N$ هو R- هومومورفيزم مودولات

1) $M=N$ عندئذٍ f يسمى إندومورفيزم

$End_R(M)$ أسرة الإندومورفيزمات على M فوق R.

2) f تقابل عندئذٍ f يسمى إيزومورفيزم.

3) f تقابل و $M=N$ عندئذٍ f يسمى أوتومورفيزم

$Aut_R(M)$ أسرة الأوتومورفيزمات على M فوق R.

* نعرف نواة الهومومورفيزم $f: M \to N$ بأنها:

$$\ker f = \{m \in M ; f(m) = 0\}$$

إن $\ker(f)$ بنية زمرة جزئية من الانطلق M

* نعرف الصورة المقابلة للهومومورفيزم: $f: M \to N$

ونرمز لها بـ $Im(f)$ بأنها:

$$Im(f) = \{n \in N ; \exists m \in M ; f(m) = n\}$$

إن $Im(f)$ بنية زمرة جزئية من المستقر N.

مثال: لتكن G زمرة تبديلية (آبلية) ولتكن $n \in \mathbb{Z}$ و $g \in G$

$$\mathbb{Z} \times G \to G$$

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g+g+g+\cdots+g}_{n \text{ مرة}} & ; n>0 \\ 0 & ; n=0 \\ \underbrace{(-g)+(-g)+(-g)+\cdots+(-g)}_{-n \text{ مرة}} & ; n<0 \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذن G هي $\mathbb{Z}$-مودول أيسر لأنّ:

$\forall n,m \in \mathbb{Z}$ و $g_1, g_2 \in G$

(1)

$$(m+n)g_1 \stackrel{?}{=} mg_1 + ng_1$$

نناقش الحالات:

(1) $m,n>0$

$$(m+n)g_1 = \underbrace{g_1 + g_1 + \cdots + g_1}_{n \text{ مرة}} + \underbrace{g_1 + g_1 + \cdots + g_1}_{m \text{ مرة}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n+m \text{ مرة}}$$

$$(m+n)g_1 = \underbrace{g_1 + g_1 + \cdots + g_1}_{m \text{ مرة}} + \underbrace{g_1 + g_1 + \cdots + g_1}_{n \text{ مرة}}$$

$$(m+n)g_1 = mg_1 + ng_1$$

(2) $n,m<0$ عندئذٍ:

$$(m+n)g_1 = \underbrace{(-g_1) + (-g_1) + \cdots + (-g_1) + (-g_1) + (g_1) + \cdots + (-g_1)}_{-(n+m) \text{ مرة}}$$

$$(m+n)g_1 = \underbrace{(-g_1) + (-g_1) + \cdots + (-g_1)}_{-m \text{ مرة}} + \underbrace{(-g_1) + (-g_1) + \cdots + (-g_1)}_{-n \text{ مرة}}$$

$$(m+n)g_1 = mg_1 + ng_1$$

(3) $n \cdot m < 0$ إحدى الحالتين السابقتين؛ وذلك

بسبب التماثل بعمومية المسألة نفرض أنّ m هو العدد الموجب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

n هو السالب و m هو الكبير

$$(m+n)g_1 = \underbrace{g_1+g_1+\cdots+g_1}_{m-n \text{ مرة}}$$

$$= \underbrace{g_1+g_1+\cdots+g_1}_{m \text{ مرة}} + \underbrace{(-g_1)+(-g_1)+\cdots+(-g_1)}_{-n \text{ مرة}}$$

$$= mg_1 + ng_1$$

$$m \cdot n = 0 \quad (4)$$

دون التقليل من عمومية المسألة كأن نكون $m=0$, $n<0$

$$(0+n)g_1 = 0g_1 + ng_1 = \underbrace{g_1+g_1+\cdots+g_1}_{n \text{ مرة}}$$

$$(0+n)g_1 = 0g_1 + ng_1$$

نكتفي بالنسبة لباقي شروط المودول يمكن مناقشتها بأسلوب مماثل

$$f(ng) = f(\underbrace{(-g_1)+(-g_1)+\cdots+(-g_1)}_{-n \text{ مرة}}) \quad ; n<0$$

$$f(ng_1) = (\underbrace{-f(g_1)+(-f(g_1)+\cdots+(-f(g_1)}_{-n \text{ مرة}}) = nf(g)$$

تعريف: ليكن f تماثلاً عندئذٍ إنّ كل f - مودول يسمى فراغاً شعاعياً ليكن V, W فراغين شعاعيين فوق f إن كل f هو مرفق مودولات:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f: W \to V$

يوجد تحويلاً شعاعياً.

تعريف:

ليكن R حلقة يوحدة و M هو R مودول نقول عن المجموعة الجزئية $N \subset M$ أنها R- مودول جزئي إذا كانت N زمرة جزئية من M تحقق:

$$\forall a \in R \ \& \ m \in N \Rightarrow am \in N$$

مرهنة:

إذا كان M هو R- مودول و $N \subset M$ حيث $N \neq 0$ عندئذٍ N هو R- مودول جزئي إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 \in N$$

وبالتالي أجل:

$$\forall a_1, a_2 \in R \ \& \ m_1, m_2 \in N$$

نظرية الأيزومورفيزم الأولى:

ليكن M, N مودولان فوق R وليكن: $f: M \to N$ هو R- هوبومورفيزم عندئذٍ:

$$M/\ker(f) \cong Im(f)$$

الإثبات:

نكتب $K = \ker(f)$ نلاحظ أن:

$$\overline{f}: M/K \to Im(f)$$ □

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\bar{f}(m+k) = f(m)$

هو أيزومورفيزم نسميه مميزة جيداً

[2]

$\bar{f}(a(m+k)) = \bar{f}(am+k) = f(am) = a\, f(m)$

$= a\, \bar{f}(m+k)$

بالتالي فإن:

$M/K \cong Im(f)$

$M/\ker(f) \cong Im(f)$

نظرية الأيزومورفيزم الثانية:

ليكن M هو R-مودول وليكن N, P مودولات جزئية من M عندئذٍ:

$(N+P)/P \cong N/N\cap P$

الإثبات:

نعرف $\pi : M \to M/P$ هو هومومورفيزم الإسقاط الطبيعي

$m \mapsto m+P$

وليكن π_0 هو قصور π على N، إذن:

π_0 هو هومومورفيزم R-مودولات نواته:

$\ker(f) = N\cap P$

$Im(\pi_0) = N+P/P$

حسب نظرية الأيزومورفيزم الأولى فإن:

$N/N\cap P \cong N+P/P$

$\Rightarrow N+P/P \cong N/N\cap P$

وهو المطلوب.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية الأيزومرفيزم الثالثة :

ليكن M هو R مودول و N, P مودولات جزئية من M بحيث $P \subset N$ عندئذٍ :

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

الإثبات :

نعرف $f : M/P \to M/N$

$$f(m+P) = m+N$$

إن f هو R ـ هومومرفيزم مودولات معرف جيداً وبداهة :

$$\ker(f) = \{m+P \in M/P ; f(m+P) = N\}$$

$$\ker(f) = \{m+P ; m+N = N\}$$

$$\ker(f) = \{m+P ; m \in N\} = N/P$$

و f غامر وهومو أي هذا يعني أن $\mathrm{Im}(f) = M/N$

وحسب نظرية الأيزومرفيزم الأولى فإن :

$$(M/P)/(N/P) \cong M/N$$

$$\Rightarrow M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z