كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

نظرية:

لتكن R حلقة تبديلية $R[x] \ni g(x)$, $R[x] \ni f(x)$ حيث $g(x)$ كثيرة حدود غير صفرية عندئذٍ يوجد كثيرة حدود وحيدة $q(x), r(x) \in R[x]$ بحيث أن

$$f(x) = q(x)\,g(x) + r(x)$$

حيث $R[x] \ni r(x)$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

الإثبات:

إن الوجود عمّ إثباته سابقاً لنبرهن الآن الوحدانية:

نفرض:

$$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

$$f(x) = g(x)\,q_1(x) + r_1(x)$$

$$\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$$

$$\deg(r(x)) < \deg(g(x))$$

$$g(x)[q_1(x) - q(x)] = r(x) - r_1(x)$$

بما أن $g(x)$ كثيرة حدود وحيدة درجتها الرئيسي هو 1 فإن بحسب الطرفين:

$$\deg[g(x)] + \deg[q_1(x) - q(x)] = \deg[r(x) - r_1(x)]$$

فإننا نفرض أنه:

$r(x) \neq r_1(x)$

$q(x) \neq q_1(x)$

لأصبح الطرف الأيمن درجته أكبر تماماً من درجة $g(x)$

بينما الطرف الأيسر درجته هي درجة $g(x)$ على الأقل

وهذا تناقض إذاً: $r(x) = r_1(x)$

$q_1(x) = q(x)$

والكتابة وحيدة.

ملاحظة: إنّ ناتجة $g(x)$ ليست صفراً عندما تكون كثيرة الحدود مؤلفة فقط.

نظرية الباقي: لتكن R حلقة تبديلية و $a \in R$ عندئذٍ لأجل كل $f(x) \in R[x]$ إنّ:

$$f(x) = (x-a)\,q(x) + f(a)$$

حيث $q(x) \in R[x]$

الإثبات:

حسب خوارزمية القسمة:

$$f(x) = (x-a)\,q(x) + r(x)$$

حيث: $\deg(r(x)) < \deg(x-a)$

وبالتالي $\deg(r(x)) \leq 0$

وبالتالي $r(x) = r \in R$

تطبيق هومومورفيزم التعويض على الطرفين: $x \to a$

$$f(a) = (a-a)\,q(a) + r \Rightarrow \boxed{f(a) = r}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نتيجة: لتكن R حلقة تبديلية و $f(x) \in R[x]$ عندئذٍ إن a جذر لـ $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $x-a$ يقسم $f(x)$

الإثبات:

$f(a)=0 \iff$ a جذر

$f(x)=(x-a)q(x)+r \iff$

$x-a \mid f(x)$

نتيجة: لتكن R حلقة صحيحة و $f(x) \neq 0$ كثيرة حدود من $R(x)$ من الدرجة n عندئذٍ يوجد n جذراً على الأكثر لـ $f(x)$ في R

الإثبات:

إذا كانت $n=0$ إنّ $f(x)$ هي كثيرة حدود ثابتة غير معدومة لا تملك جذوراً في R بالتالي تحقق المطلوب.

* لأنه نفرض أن $n>0$ ولنبرهن لها لأي جذر في R فلك يكون قد عم المطلوب

* نفرض أن $f(x)$ تملك جذراً ما a على الأقل هو وبسبب نتيجة سابقة إنّ $x-a$ يقسم $f(x)$ لذلك يمكننا أن نكتب:

$f(x)=(x-a)q(x)$

إنّ: $\deg(f(x)) = \deg(x-a) + \deg(q(x))$

$\deg(q(x)) = \deg(f(x)) - \deg(x-a)$

$n \qquad 1$

$\Rightarrow \deg(q(x)) = n-1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حسب الفرضية بالاستقراء يوجد على الأكثر $n-1$ جذر لـ $q(x)$ في R وبالتالي: في حال كانت a أحد جذور $q(x)$ إثبات لـ $f(x)$ $n-1$ جذر على الأكثر

* إذا كان a ليس جذراً لـ $q(x)$ إن لـ $f(x)$ $n-1+1=n$ جذراً على الأكثر في R

وهو في كلا الحالتين هو المطلوب.

مثال: $R=\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $R=\mathbb{Z}_2 \times$

R ليست حلقة صحيحة

$R=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

لنأخذ $f(x)=x^2-x$ كثيرة حدود من $R[x]$

$(0,0)(0,0)-(0,0)=(0,0)$

$(0,1)(0,1)-(0,1)=(0,0)$

$(1,0)(1,0)-(1,0)=(0,0)$

$(1,1)(1,1)-(1,1)=(0,0)$

(*) نتيجة: لتكن R حلقة صحيحة و $g(x), f(x) \in R[x]$ كثيرات حدود بحيث الدرجة أقل أو يساوي n إذا كان $f(a)=g(a)$ من أجل $n+1$ عنصر متباين (distinct elements) في R عندئذٍ $f(x)=g(x)$

الإثبات:

نكون $h(x)=f(x)-g(x)$ إذاً $\deg(h(x)) \leq n$

وبالتالي لدينا n جذراً على الأكثر ولكن حسب الفرضية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

إذن لـ $h(x)$ يوجد $n+1$ جذراً، إذا $h(x)=0$

وبالتالي $g(x)=f(x)$

برهنة: ليكن f متعدداً و $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ عنصراً متمايزاً في F وليكن $c_0, c_1, \dots, c_n$ عناصراً كيفياً من R

(ليس بالضرورة أن تكون c_i متمايزة $0 \le i \le n$)

عندئذٍ يوجد كثيرة حدود $f(x) \in F[x]$ من درجة $\le n$ بحيث $\deg(f(x)) \le n$ وبحيث أن $f(a_i)=c_i$ لكل $0 \le i \le n$

الإثبات: الوحدانية محققة ومن حالة النتيجة (A) وليبرهن الوجود نضع لأجل $0 \le i \le n$ نعرف $n+1$ كثيرة حدود بالشكل:

$$P_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x-a_j)}{(a_i-a_j)} ;$$

إن $P_i(x)$ تملك درجة $= n$

لاحظ أن $P_i(a_j) = \delta = \begin{cases} 1 & \text{و } i=j \\ 0 & \text{و } i \neq j \end{cases}$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i(x)$$

وهو المطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ساحة الإيديالات الرئيسية:

هي ساحة كل إيديال فيها مولد بعنصر واحد.

نظرية:

ليكن F حقلاً عندئذٍ $F[x]$ ساحة إيديالات رئيسية.

الإثبات:

ليكن I إيديالاً في $F[x]$ إذا كان $I=\{0\}$ عندئذٍ I إيديال رئيسي برهاناً ويتم المطلوب.

لذلك $I\neq\{0\}$ ولنختار $g(x)\in I$ حيث أن $g(x)$ على الدرجة الأصغرية بين كثيرات حدود I الغاية للصفر

سنثبت أن $I=(g(x))$

بما أن F حقلاً يمكن أن نضرب $g(x)$ بمقلوب ثابتها الرئيس لجعلها واحدية ينتج كثيرة حدود في I لذلك يمكننا البداية أن نفترض أن $g(x)$ واحدية

ليكن $f(x)\in I$ كيفياً.

في خوارزمية القسمة:

$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$

$\deg(r(x))<\deg(g(x))$

* في حالة $r(x)=0$ تم المطلوب.

* في حالة $r(x)\neq 0$ إن:

$\deg(r(x))<\deg(g(x))$

$r(x)=f(x)-g(x)\,q(x)\Rightarrow$

$r(x)\in I$ وهذا يناقض أصغرية درجة $g(x)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحلقة النوترية:

تعريف: لتكن R حلقة نقول بأن R تحقق شرط السلسلة الصاعدة ACC (Ascending Chain Condition) على المثاليات إذا تحقق الشرط:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $I_k = I_n$ لكل $k \geq n$

تعريف: نقول بأن R هي حلقة نوترية إذا كانت تحقق شرط السلسلة الصاعدة.

برهنة: لتكن R حلقة عندئذٍ إنّ الشروط التالية تكافئ:

(1) R نوترية.

(2) كل مثالي في R هو مثالي منتهي التوليد.

(3) كل مجموعة غير خالية من المثاليات في R تملك عنصراً أعظمياً.

الإثبات:

(1) $\Rightarrow$ (3)

نفرض أن $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ مجموعة غير خالية لا تملك عنصراً أعظمياً.

نفرض أن $I_1 \in S$ إذاً يوجد $I_2 \in S$ بحيث $I_1 \subseteq I_2$ بما أن I_2 ليست أعظمياً أيضاً إذاً يوجد $I_3 \in S$ بحيث

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3$

قياساً على ذلك يمكن بناء سلسلة متزايدة لانهائية في S وهذا يناقض كون R نيوترية.

(3) $\Leftarrow$ (2):

ليكن I إيديالاً في R ولنبرهن S أن كل الإيديالات متولدة منتهية والمحتواة في I، بسبب الفرض إن S تحوي عنصراً أعظمياً ولتكن J.

ليكن $a \in I$ عنصراً كيفياً، عندئذٍ:

$$J + \langle a \rangle \subseteq I$$

وبما أن J من أعظمية J نجد أن:

$$J = J + \langle a \rangle$$

عليه $a \in J$

وبالتالي $I = J$

(2) $\Leftarrow$ (1)

ليكن: سلسلة متزايدة $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$

في R ولنأخذ $I = \bigcup_{n=0} I_n$

إن I إيديال في R وبالتالي I متولد منتهي التوليد

$I = \langle a_1, a_2, \cdots a_k \rangle$

$a_i \in R$ أجل

إن $a_i \in I$ إذاً يوجد I_{hi} كيف $a_i \in I_{ni}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبما كون السلسلة صاعدة يوجد m بحيث:

$|K[i]| < k$ لكل $q_i \in I_m \Rightarrow I = I_m$

وبالتالي $\forall p \geq m$ فإن:

$I = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq I_p \subseteq I$

$\Rightarrow I_p = I = I_m$

$\Rightarrow$ نوثرية R

نتيجة: (دون برهان)

لتكن R حلقة نوثرية عندئذٍ $R[x]$ حلقة نوثرية

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة