كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : بنى جبرية٣

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تكملة البرهان:

$\phi: R \to R_S$ ، $\phi': R \to R'_S$

هما تشاكلان لـ R بما أن S ، لنعرف $\beta: R_S \to R'_S$

وليكن لدينا:

$$a = \phi(b)[\phi(c)]^{-1}$$

حيث: $a \in R_S$ و $b \in R$ و $c \in S$

وليكن β معرف بالشكل $\beta(a) = \phi'(b)[\phi'(c)]^{-1}$

لنبرهن أن β معرف جيداً:

إذا كان:

$$a = \phi(b)[\phi(c)]^{-1} = \phi(b')[\phi(c')]^{-1}$$

عندئذٍ فإنه:

$$\phi(b)\phi(c') = \phi(b')\phi(c)$$

$$\phi(bc') = \phi(b'c) \Rightarrow bc' = b'c$$

نطبق ϕ' على الطرفين

$$\phi'(b)\phi'(c') = \phi'(b')\phi'(c)$$

$$\phi'(b)[\phi'(c)]^{-1} = \phi'(b')[\phi'(c')]^{-1} = \beta(a)$$

وبالتالي β معرف جيداً.

لنبرهن أن β تقابل:

نعرف: $\delta: R'_S \to R_S$

$\gamma(a') = \phi(b)[\phi(c)]^{-1}$; $a' = \phi'(b')[\phi'(c')]^{-1}$

$b' \in R$, $c' \in S$ حيث

يمكن إثبات أن γ معرف جيداً بهذه العلاقة

$\forall a \in R_S \Rightarrow a = \phi(b)[\phi(c)]^{-1}$

$b \in R$, $c \in S$ حيث

$\Rightarrow \gamma[\beta(a)] = \gamma[\phi'(b)[\phi'(c)]^{-1}] = \phi(b)[\phi(c)]^{-1} = a$

إذن $\gamma[\beta(a)]$ ما هو إلا التطبيق المطابق بالتالي

فإن β تقابل

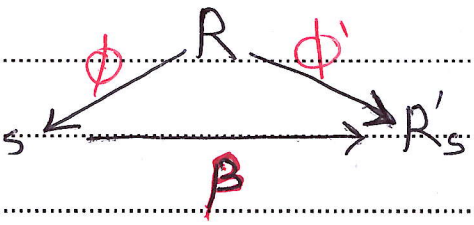
يمكن بسهولة اعتماداً على أن ϕ و ϕ' هما هومومورفيزمان

إثبات أن β هو هومومورفيزم حلقات وبالتالي:

هذا الخط تبديلي.

$\beta(\phi) = \phi'$ ونلاحظ أن

وبالتالي التمييز وحيد.



حلقة كثيرات الحدود:

ليكن $\mathbb{Z}^+$ أو $\mathbb{N}$ أو الأعداد الصحيحة الموجبة (غير السالبة)

و R حلقة ما بواحدة + نعرف $R[x]$ بأنها أو $\mathbb{Z}^+$ الدوال من الشكل $f: \mathbb{Z}^+ \to R$ حيث أن

$f(n) = 0$ باستثناء عدد منتهٍ من الأعداد الصحيحة

التوضيح: إذا كان لدينا كثيرة الحدود التالية:

$2 + 3x^2 + 5x^7$

فإن تمثيل f هي: $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = 0$

$f(7) = 5$

أي $f(n) = 0$ باستثناء عدد نهائي من قيم n وهي $\{0,2,7\}$

أي أن $f(n)$ هي مثال x^n لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\, g(n-m)$$

مثال:

$$X(n) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$X^n(m) = \begin{cases} 1 & ; \quad m = n \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

إن f يمكن كتابتها بالشكل:

$$\forall\, f \in R[x] \Rightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n$$

ولكن:

$$1 : \mathbb{Z}^+ \to R$$

معرف بالشكل:

$$1(n) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n > 0 \end{cases}$$

إن التطبيق السابق هو حيادي الجداء في $R[x]$

إذا كتبنا $f(n) = a_n$ يصبح شكل عناصر $R[x]$ كالتالي:

$$R[x] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ليكن f و g عنصرين من $R[x]$ عندئذٍ:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$(f+g)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

$$(f.g)(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad ; \quad c_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, b_{n-m} \quad ; \quad n=\overline{0\infty}$$

لتكن S حلقة أخرى تبديلية أيضاً بواحدة، نعرف ϕ هو
هومومورفيزم حلقات بالشكل: $\phi: R \to S$

بحيث $\phi(1_R)=1_S$

ليكن u من S نعرف التطبيق: $\phi_u: R[x] \to S$

بالشكل:

$$\phi_u(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi(f(n))u^n=\phi(f(0))u^0+\phi(f(1))u^1+\dots$$

بكلام آخر:

$$\phi_u(f)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\phi(a_n)u^n$$

ϕ_u هومومورفيزم التعويض المتعلق بـ ϕ

تعريف: ليكن $f(x)\in R[x]$ نعرف درجة f بالشكل:

$$\deg(f(x))=\max\{m;\ a_m\neq 0\}$$

* يعرف أن $\deg(f(x))=n$ عندئذٍ ندعو a_n
العامل الرئيس

* عندما $n=0$ ندعو a_0 الحد الثابت أو الحر.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* بفرض أن $\deg(f(x)) = n$ و $a_n = 1$ نقول إن كثيرة الحدود هي كثيرة حدود واحدية (monic Paynamial)

برهنة: لتكن R حلقة تبديلية و $f(x), g(x) \in R[x]$ عندئذٍ:

① $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$

② $\deg(f(x).g(x)) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x))$

③ تتحقق المساواة في البند ② إذا كانت R لا تحوي قواسم للصفر.

نتيجة: إذا كانت R ساحة صحيحة، عندئذٍ:

① $R[x]$ أيضاً ساحة صحيحة.

② الواحدات في $R[x]$ هي نفسها الواحدات في R

الإثبات:

① بفرض أن $f(x) \neq 0$ و $g(x) \neq 0$ عندئذٍ:

$\deg(f(x).g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) > -\infty$

لأن درجة كثيرة الحدود الصفرية هي $-\infty$

أي أن $f(x).g(x) \neq 0$ إذاً $R[x]$ ساحة صحيحة

② بفرض أن $f(x) \neq 0$ واحدة في $R[x]$ عندئذٍ يوجد $g(x) \in R[x]$ بحيث $f(x).g(x) = 1$

إذاً:

$\deg(f(x).g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) = \deg(1)$

$\Rightarrow \deg(f(x)) + \deg(g(x)) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow \deg(f(x)) = \deg(g(x)) = 0$

إذاً $f(x) = a_0$ و $g(x) = b_0$ أي أن a_0 واحدة في R.

خوارزمية القسمة:

تعريف: ليكن:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + x^m \in R[x]$$

حيث $m \geq 1$ وهذه كثيرة حدود واحدية.

إذا كانت $n \geq m$ نعرف $q_1(x) = a_n x^{n-m}$

$$f_1(x) = f(x) - g(x)\, q_1(x)$$

وله درجة كبيرة $\deg(f_1(x)) \leq n-1$

إذا كان $\deg(f_1(x)) \geq m$ نكرر العملية السابقة على $f_1(x)$ ولكن هذه المرة نطبقها على $f(x)$ بعد عدد متتهي من الخطوات نحصل على $f_s(x)$ حيث $\deg(f_s(x)) < m$، نعرف شرطاً:

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x) + \cdots + q_s(x)$$

و

$$r[x] = f[x] - g(x)\, q(x)$$

عندئذٍ فإنّ:

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$$

حيث:

$$\deg(g(x)) > \deg(r(x))$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z