كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : ٦+٧/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

((التمارين 1, 2, 3, 4 في المحاضرة 7 نظري بالإضافة إلى 1, 2, 3 من هذه المحاضرة هم المحاضرة 6 عملي))

التمرين الأول:

X تغير عشوائي يتبع توزيعاً منتظماً على المجال $[0, 3]$ وليكن $Y = X^2$ أوجد قيمة $g(y)$.

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & ; \quad x \in [0, 3] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$y = h(x) = x^2$ هي دالة متزايدة على المجال $[0, 3]$

$$x = h^{-1}(y) = \sqrt{y} = x$$

$$\left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{y}} & ; \quad 0 < y < 9 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

التمرين الثاني:

X متغير عشوائي يتبع توزيعاً مستمراً مطلقاً من دالة كثافة احتمالية

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & ; 0<x<\pi \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$y=h(x)=x^2$

أوجد $g(y)$

الحل: $h(y)$ دالة متزايدة على $[0,\pi]$

$$x=h^{-1}(y)=\sqrt{y} \Rightarrow \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y)=f(h^{-1}(y))\cdot\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|=\frac{1}{2}\sin\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}\sin\sqrt{y} & ; 0<y<\pi^2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

التمرين الثالث:

X متغير عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً $Y=x^3$

أوجد $g(y)$

الحل: $y=h(x)=x^3$ دالة متزايدة على المجال $]0,\infty[$

ومتناقصة $]-\infty,0[$

$$h^{-1}=\sqrt[3]{y}=x$$

$$\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|=\left|\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\right|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f(h^{-1}(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^{-\frac{2}{3}}}{2}}$$

$$g(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \left| y^{-\frac{2}{3}} \right| e^{\frac{-y^{-\frac{2}{3}}}{2}}$$

بداية المحاضرة 7 على:

التمرين الأول:

ليكن X, Y متغيران عشوائيان متصلان دالة توزيعها الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; x=2 \ , \ y=3 \\ \frac{1}{5} & ; x=3 \ , \ y=2 \\ \frac{1}{5} & ; x=-3 \ , \ y=-2 \\ \frac{1}{5} & ; x=-2 \ , \ y=-3 \\ \frac{1}{5} & ; x=17 \ , \ y=19 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

a) أوجد الدالة الهامشية لـ $f(x)$ والدالة الهامشية لـ $f(y)$

b) أوجد $P(Y>X)$ و $P(X=Y)$

c) أوجد $P(X.Y)<0$

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F_X(x) = \sum_y f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; \ x = 2 \\ \frac{1}{5} & ; \ x = 3 \\ \frac{1}{5} & ; \ x = -3 \\ \frac{1}{5} & ; \ x = -2 \\ \frac{1}{5} & ; \ x = 17 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$ a

$$F_Y(y) = \sum_x f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; \ y = 3 \\ \frac{1}{5} & ; \ y = 2 \\ \frac{1}{5} & ; \ y = -2 \\ \frac{1}{5} & ; \ y = -3 \\ \frac{1}{5} & ; \ y = 16 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P(Y > X) = f_{x,y}(2,3) + f_{x,y}(-3,-2) + f_{x,y}(17,19)$$ b

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(X = Y) = 0$$

$$P(X \cdot Y < 0) = 0$$ c

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الثاني:

ليكن X , Y متغيران عشوائيان مستمران دلقاً دالة الكثافة الاحتمالية تعطى بالعلاقة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & ; \quad 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

أوجد $f_X(x)$, $f_Y(y)$

الحل:

$$f_X(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$\int_0^1 4x^2y + 2y^5\,dy = \left[4x^2\frac{y^2}{2} + 2\frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \left[2x^2y^2 + \frac{y^6}{3}\right]_0^1$$

$$= \left[2x^2 + \frac{1}{3} - 0\right] = 2x^2 + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{3} & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_X(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 (4x^2y + 2y^5)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3y + 2y^5x\right]_0^1 \\ = \frac{4}{3}y + 2y^2 \quad ; \quad 0 < y < 1 \\ 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الثالث

X, Y متغيران عشوائيان مطلقاً دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تعطى بالعلاقة:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} 120x^3y & ; \ 0 \le x \ , \ 0 \le y, x+y \le 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

a) تحقق أن $f_{x,y}(x,y)$ دالة كثافة احتمالية مشتركة.

b) أوجد الدالة الهامشية لـ $f_x(x)$

الحل:

a) نلاحظ أن: $f_{x,y}(x,y) \ge 0$ لكل $(x,y) \in R^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 120x^3y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 120x^3y\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 120x^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 120x^3 \left[\frac{1-x^2}{2} - 0 \right] dx$$

$$= \int_0^1 60x^3(1-2x+x^2)\,dx = \int_0^1 60(x^3 - 2x^4 + x^5)\,dx$$

$$= 60\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 60\left[\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} - 0 \right]$$

$$= 60\left(\frac{2}{120} \right) = 1$$

محققة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 120x^3 y\,dy = \left[120x^3 \frac{y^2}{2}\right]_0^x = [60x^3(1-x^2)] \\ = 60x^3(1-2x+x^2) = 60(x^3-2x^4+x^5), & 0<x<1 \\ 0, & \text{ضد ذلك} \end{cases}$$

التمرين الرابع:

أثبت أن $F_{X,Y}(x,y) \leq \min[F_X(x), F_Y(y)]$

الحل:

نلاحظ أن:

$[X\leq x, Y\leq y]$, $[X\leq x]$, $[Y\leq y]$ (أحداث)

الأحداث التالية منها علاقة الاحتواء التالية:

$[X\leq x, Y\leq y] \subset [X\leq x]$

$[X\leq x, Y\leq y] \subset [Y\leq y]$

ثم العلاقة بين احتمالات الأحداث التي يكون إحداها محتوى بالآخر

$P(X\leq x, Y\leq y) \leq P(X\leq x)$

$P(X\leq x, Y\leq y) \leq P(Y\leq y)$

ونعلم:

$P(X\leq x, Y\leq y) = F_{X,Y}(x,y) \Rightarrow P(X\leq x) = F_X(x)$

$P(Y\leq y) = F_Y(y)$

$F_{X,Y}(x,y) \leq F_X(x)$, $F_{X,Y}(x,y) \leq F_Y(y)$

$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y))$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الخامس:

ليكن X, Y متغيران عشوائيان مستمران مطلقاً:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\sin(x,y), & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{و خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب: أوجد $f_X(x)$ ، $f_Y(y)$

الحل:

$$f_X(x) = \int_0^2 f_{X,Y}(x,y)\,dy = c\int_0^2 \sin(x,y)\,dy = c\left[\frac{-\cos(x,y)}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{c}{x}\left[-\cos(2x)+\cos(0)\right] = \frac{c}{x}\left[1-\cos(2x)\right], \quad 0<x<1$$

و خلاف ذلك 0

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{c}{y}(1-\cos(y)) & 0<y<2 \\ 0 & \text{و خلاف ذلك} \end{cases}$$

التمرين السادس:

ليكن X, Y متغيران عشوائيان مستمران مطلقاً بدالة كثافة احتمالية مشتركة $f_{X,Y}(x,y)$ معطاة بالعلاقة:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4}, & 0<x<y<2 \\ 0 & \text{و خلاف ذلك} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

[9] أوجد $F_x(x)$, $F_y(y)$

الحل:

$$F_x(x)=\begin{cases}\int_x^2 f_{x,y}(x,y)\,dy=\int_x^2 \frac{x^2+y}{4}\,dy=\int_x^2 \frac{x^2}{4}\,dy+\int_x^2 \frac{y}{4}\,dy\\ =\left[\frac{x^2}{4}y\right]_x^2+\left[\frac{y^2}{8}\right]_x^2=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}\right]\\ =\left[\frac{4x^2}{8}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\right]\\ =\left[\frac{3x^2-2x^3+4}{8}\right]=\left[\frac{-2x^3+3x^2+4}{8}\right]\quad ;\ 0<x<2\\ 0\qquad \text{خلاف ذلك ؛}\end{cases}$$

$$F_y(y)=\begin{cases}\int_0^y f_{x,y}(x,y)\,dx=\int_0^y \frac{x^2+y}{4}\,dx=\int_0^y \frac{x^2}{4}\,dx+\int_0^y \frac{y}{4}\,dx\\ =\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^y+\left[\frac{yx}{4}\right]_0^y=\left[\frac{y^3}{12}-0\right]+\left[\frac{y^2}{4}-0\right]\\ =\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{4}=\frac{y^3+3y^2}{12}\quad ;\ 0<y<2\\ 0\qquad \text{خلاف ذلك ؛}\end{cases}$$

انتهت المسألة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة