كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

التوقع: Expectation

هنا سوف نميز حالتين:

1) المتغيرات العشوائية المنفصلة:

ليكن X متغيراً عشوائياً منفصلاً. إن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X:

$$E(X) = \sum_{x \in IR} x f_X(x)$$

حيث $f_X(x)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X:

تطبيق:

z_i	p_i
-3	0.2
11	0.7
31	0.1

$$E(z) = (-3)(0.2) + (11)(0.7) + (31)(0.1) = 10.2$$

* فيما يلي سوف ندرس التوقع الرياضي للتوزيعات الاحتمالية المألوفة:

1) التوزيع المنحط:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; x = c \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E(X) = \sum x f_X(x) = c(1) + 0 = c$$

(2) توزيع برنولي:

$$F_X(x) = \begin{cases} \alpha & ; x = 1 \\ 1-\alpha & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$E[X] = \alpha(1) + (1-\alpha)(\alpha) + 0 = \alpha$$

★ يرمز أحياناً للتوقع الرياضي بالرمز μ أي $E(X)$

(3) توزيع ثنائي الحد:

$$F_X(k) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \quad ; k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

$0! = 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$$

نعلم أنّ:

$$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^i b^{m-i} \quad ; i = k-1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$E(X) = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha^{i+1} (1-\alpha)^{n-i-1}$$

$1 \le k \le n$

$0 \le k-1 \le n-1$

$$E(X) = n\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha^{i} (1-\alpha)^{n-i-1}$$

$$= n\alpha [\alpha + (1-\alpha)]^{(n-1)}$$

$$\boxed{E(X) = n\alpha}$$

(4) التوزيع الهندسي :

$x = k$

$$f_X(k) = (1-\alpha)^k \alpha \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\alpha)^k \alpha$$

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\alpha)^k \alpha} \quad (1)$$ في خاصية أولى

$$(1-\alpha)E(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell (1-\alpha)^{\ell+1} \alpha$$

بوضع $k = \ell + 1$

$$\boxed{(1-\alpha)E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)(1-\alpha)^k \alpha} \quad (2)$$ في خاصية ثانية

بطرح (2) من (1) :

$$\alpha E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} [k-(k-1)] (1-\alpha)^k \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^k = \frac{1-\alpha}{1-(1-\alpha)} \alpha$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\alpha\, E(z) = (1-\alpha)$$

$$E(z) = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\mu = \frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

(5) توزيع بواسون :

$$x = k$$

$$f_x(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad , k = 0,1,\dots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{(k-1)!} \qquad \ell = k-1$$

$$E(X) = e^{-\lambda}\lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda}\cdot\lambda e^{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

مثال على التوقع لا نهائي :

$$f_x(2^k) = \begin{cases} 2^{-k} & ; \quad k = 1,2,\dots \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$P(X=2) = \frac{1}{2} \mid P(X=1) = 0$

$P(X=4) = \frac{1}{4} \mid P(X=3) = 0$

إن $f_X(x)$ تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالي لأنّ:

$f_X(x) \geq 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{x \in R} f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

متسلسلة هندسية

لحساب التوقع:

$$E(X) = \sum_{x \in R} x \, f_X(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

مثال على التوقع غير موجود:

X متغير عشوائي منفصل:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2^y & ; \quad y = 2, 8, 16, \dots \\ 1/2^{|y|} & ; \quad y = -2, -4, \dots \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

إن $f_Y(y)$ تحقق شروط دالة التوزيع الاحتمالي لأنّه

$f_X(y) \geq 0 \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{y\in R} f_y(y) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

$$= 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2\,\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\cdot 2 = 1$$

حساب التوقع:

$$E(y) = \sum_{y=R} y\, f_y(y)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2\cdot 2^k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-2^k)\frac{1}{2\cdot 2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{2} = \infty - \infty$$

مبرهنة: ليكن X, Y متغيران عشوائيان معرفان

$$h: R^2 \to R$$

$$E(h(x,y)) = \sum h(x,y)\, f_{x,y}(x,y)$$

حيث $f_{x,y}(x,y)$ هو التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X, Y

الإثبات:

$$z = h(x,y)$$

$$f_z(z) = \sum_{z=h(x,y)} f_{x,y}(x,y)$$

$$E(z) = \sum z\, f_z(z) = \sum_z z \sum_{z=h(x,y)} f_{x,y}(x,y)$$

عندئذٍ:

$$\Rightarrow E(z) = \sum_{(x,y)} h(x,y)\, f_{x,y}(x,y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

برهنة: (دون برهان)

X متغير عشوائي منفصل $g: R \to R$ عندئذٍ

$$E[g(x)] = \sum_{x \in R} g(x) f_X(x)$$

حيث $f_X(x)$ هي دالة التوزيع الاحتمالي.

برهنة: ليكن X, Y متغيران عشوائيان منفصلان و $a, b \in R$

عندئذٍ: $Z = aX + bY$

فإن: $E(Z) = aE(X) + bE(Y)$

الإثبات:

$$E(Z) = E(aX + bY)$$

$$= \sum_{(x,y)} (ax + by) f_{X,Y}(x,y)$$

$$= a \sum_x \sum_y x f_{X,Y}(x,y) + b \sum_y \sum_x y f_{X,Y}(x,y)$$

$$= a \sum_x x f_X(x) + b \sum_y f_Y(y)$$

$$= aE(X) + bE(Y)$$

برهنة: ليكن X, Y متغيران عشوائيان منفصلان مستقلان

عندئذٍ:

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الإثبات: بما أن X, Y مستقلان =>

$$f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

عندئذٍ:

$$E(X.Y) = \sum xy\, f_{X,Y}(x,y)$$

$$\Rightarrow E(X.Y) = \sum_x \sum_y xy\, f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$= \sum_x x\, f_X(x) \sum_y y\, f_Y(y) = E(X) \cdot E(Y)$$

مبرهنة: إذا كان X, Y متغيران عشوائيان متقطعان بحيث $X \leq Y$ عندئذٍ:

$$E(X) \leq E(Y)$$

الإثبات:

$Z = Y - X$ $\quad Z \geq 0$ عندئذٍ:

$$E(Z) = E(Y) - E(X)$$

ولكن $E(Z) \geq 0$

وبالتالي $E(Y) - E(X) \geq 0$

$$E(Y) \geq E(X)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z