كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين [1]:

X متغير عشوائي تتبع توزيعاً طبيعياً منتظماً على المجال $[L,R]$

$Y=cX+d$ متغير عشوائي جديد حيث $c>0$

أثبت أن y تتبع توزيعاً منتظماً على المجال $[cL+d, cR+d]$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{R-L} & ; x\in[L,R]\\ 0 & ; \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$$y=h(x)=cx+d \quad ; \quad c>0$$

بما أن $c>0$ إذن $h(x)$ متزايد على $[L,R]$

إن دالة الكثافة الاحتمالية لـ y تعطى بالعلاقة:

$$g(y)=f(h^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d(h^{-1}(y))}{dy}\right| \quad ; \quad h^{-1}(y)=\frac{y-d}{c}$$

$$L\le x\le R$$

$$cL\le cx\le cR$$

$$cL+d\le y\le cR+d$$

$$\Rightarrow f(h^{-1}(y))=\frac{1}{R-L}$$

$$\frac{d(h^{-1}(y))}{dy}=\frac{1}{c}$$

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{cR-cL}=\dfrac{1}{(cR+d)-(cL+d)} & ;\ y\in[cL+d,cR+d]\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

Y متغير عشوائي مستمر يتبع توزيعاً منتظماً على $[cL+d,\ cR+d]$

تمرين 5: X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع أسي سالب

$$Y=X^3$$

أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي Y

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ;\ x\geq 0\\ 0 & ;\ \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$$y=h(x)=x^3$$

إن $h(x)$ دالة مستمرة متزايدة وقابلة للاشتقاق على $[0,\infty[$

$$x=h^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$$

$$f(h^{-1}(y))=\lambda e^{-\lambda y^{1/3}}$$

$$\frac{d(h^{-1}(y))}{dy}=\frac{1}{3}e^{-2/3}$$

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{d(h^{-1}(y))}{dy}\right| = \frac{1}{3}\lambda e^{-\lambda y^{1/3}} \cdot y^{-\frac{2}{3}} & \text{و} \\ & y \in [0, \infty[\\ 0 & \text{خلاف ذلك و} \end{cases}$$

$$y \in \lim_{x \to \infty} h(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$$

$$y \in [0, \infty[$$

تمرين [3] تتبع لآلة المذكورة في المحاضرة الثانية:

x	1	-1	3	-3
$f(x)$	$\frac{108}{343}$	$\frac{144}{343}$	$\frac{27}{343}$	$\frac{64}{343}$

$$Y = X^2 - 1$$

أوجد قيم المتغير العشوائي Y ودالة التوزيع الاحتمالي له.

الحل:

$$X = \{0, 8\}$$

$$g(y) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} f(X = x)$$

$$g(0) = \sum_{x \in h^{-1}(0)} f(X = x) = f(X = 1) + f(X = -1) = \frac{252}{343}$$

$$g(8) = \sum_{x \in h^{-1}(8)} f(X \in x) = \frac{27}{343} + \frac{64}{343} = \frac{91}{343}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

y	0	8
$g(y)$	$\frac{252}{343}$	$\frac{91}{343}$

التمرين الرابع :

X متغير عشوائي مستمر مطلقاً بالكثافة الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & ; \quad 0 < x < 2 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

(a) $Y = X^2$

(b) $Z = \sqrt{X}$

أوجد $g(y)$

أوجد $k(z)$

الحل : (a)

$$y = h(x) = x^2$$

$$x = h^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

إن $h(x)$ بالقوة متمرة ومتزايدة على المجال $[0,2]$

$$x \in [0,2] \Rightarrow y \in [0,4]$$

$$f(h^{-1}(y)) = \frac{y^{3/2}}{4} \quad , \quad \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} y & ; \quad y \in [0,4] \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

[b]

$$Z = h(x) = \sqrt{x}$$

$$x = h^{-1}(z) = z^2$$

$$x \in [0,2] \Rightarrow Z \in [0, \sqrt{2}]$$

$$f(h^{-1}(z)) = \frac{z^6}{4}$$

$$\left| \frac{d h^{-1}(z)}{dz} \right| = 2z$$

$$k(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & ; z \in [0, \sqrt{2}] \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

التوزيع المشترك:

Joint Distribution

* ليكن x, y متغيران عشوائيان، إن التوزيع المشترك للمتغيرين x, y هو مجموعة الاحتمالات

$$P(X,Y) \in B \quad ; \quad B \subset \mathbb{R}^2$$

* دالة التوزيع التراكمي المشترك:

Joint Distribution Function

بالتعريف هي:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

ومن خواصها:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التوزيع الهامشي :

دوال التوزيع التراكمي الهامشية تعطى بالعلاقة :

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x \ , \ y < \infty)$$

* حالة X, Y متغيران عشوائيان متقطعان

تعرف دالة التوزيع الاحتمالي المشترك :

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

* حالة X, Y متغيران عشوائيان مستمران فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تحقق

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$$

وفي هذه الحالة :

$$P(a \leq X < b \ , \ c < Y \leq d) =$$

$$\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعرف دوال الكثافة الاحتمالية الهامشية :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

* ملاحظة : إن دوال التوزيع الاحتمالي الهامشية عندما X,Y منفصلان :

$$f_X(x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$$

تمارين :

1) X متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي

$X = \{0,1\}$; $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$

نعرف : $Y_1 = X$

$Y_2 = 1 - X$

$Y_1 = \{0,1\}$, $P(Y_1=0) = P(Y_1=1) = \frac{1}{2}$

$Y_2 = \{0,1\}$, $P(Y_2=0) = P(Y_2=1) = \frac{1}{2}$

إذن Y_1 و Y_2 متحولين برنولي $(1/2)$

$(X, Y_1) = \{(0,0), (1,1)\}$

$(X, Y_2) = \{(1,0), (0,1)\}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$F_{X,Y_1}(x,y)=\begin{cases}0 & ; \min(x,y)<0\\ \frac{1}{2} & ; 0\le \min(x,y)<1\\ 1 & ; \min(x,y)\ge 1\end{cases}$$

$$F_{X,Y_2}(x,y)=\begin{cases}0 & ; \min(x,y)<0 \text{ أو } \max(x,y)>1\\ \frac{1}{2} & ; 0<y<1\\ \frac{1}{2} & ; 0<x<1\\ 1 & ; \max(x,y)\ge 1\end{cases}$$

تمرين 2

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & ; x<0,\ y<0\\ xy^2 & ; 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ x & ; 0\le x\le 1,\ y\ge 1\\ y^2 & ; x\ge 1,\ 0\le y\le 1\\ 1 & ; x>1,\ y>1\end{cases}$$

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=x$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=y^2$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z