كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : نظرية الاحتمالات

المحاضرة : **السادسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

X متغير عشوائي متقطع $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

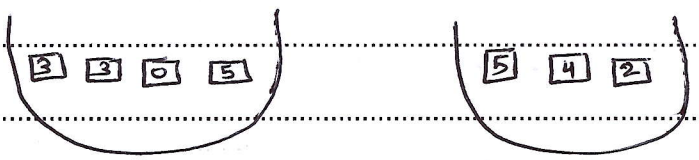
$f(x)$ دالة توزيع الاحتمالي

$$P(x_2 < X \leq x_4) = f(x_3) + f(x_4)$$
$$= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) - f(x_1) - f(x_2)$$
$$= \sum_{i=1}^{4} f(x_i) - \sum_{i=1}^{2} f(x_i)$$
$$= P(X \leq x_4) - P(X \leq x_2)$$
$$= F(x_4) - F(x_2)$$

تمرين: بفرض أنّه لدينا سلّتين في كل سلة مجموعة من الرقاقات الإلكترونية عليها أرقام.

السلة الأولى: فيها رقاقة تحمل الرقم 0، ورقاقتان عليهما الرقم 3 ورقاقة عليها الرقم 5

السلة الثانية: رقاقة عليها الرقم 2، ورقاقة عليها الرقم 5 و رقاقة عليها الرقم 4



نسحب رقاقة واحدة.

X_i متغير عشوائي يعبر عن رقم الرقاقة المسحوبة من الصندوق i

حيث $i = 1, 2$

عندئذٍ إن قيم المتغير العشوائي X_i حيث $i = 1, 2$ تعطى بالعلاقة:

$$\begin{cases} X_1 = \{0, 3, 5\} \\ X_2 = \{2, 4, 5\} \end{cases}$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{4} \qquad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 4) =$$

$$P(X_1 = 3) = \frac{2}{4} \qquad P(X_2 = 5) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_1 = 5) = \frac{1}{4}$$

- دوال التوزيع التراكمي F_i:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & ; \quad 0 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & ; \quad 3 \leq x < 5 \\ 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 2 \\ \frac{1}{3} & ; \quad 2 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} & ; \quad 4 \leq x < 5 \\ 1 & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$

بفرض أننا سوف نختار رقاقة بشكل عشوائي عن طريق سحب بطاقة من مجموعة مكونة من 5 بطاقات متماثلة على أحدها كتب العدد 1 وعلى الباقي كتب العدد 2

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ليكن Z متغيراً عشوائياً يدل على العدد الموجود على البطاقة المسحوبة

$Z=\{1,2\}$

$P(Z=1)=\frac{1}{5}$ ، $P(Z=2)=\frac{4}{5}$

باعتماد على التوزيع الشرطي سوف نسحب بطاقة وبناءً على رقم البطاقة المسحوبة نحدد آلة نسحب الرقاقة:

X متغير عشوائي يعبر عن رقم الرقاقة المسحوبة بعد إجراء هذه التجربة المركبة.

أوجد دالة التوزيع التراكمي لـ X

الحل:

X يتبع توزيعاً مختلطاً دالة توزيعه التراكمي:

$$G(x)=\frac{1}{5}F_1(x)+\frac{4}{5}F_2(x)$$

مثال حول توزيع احتمالي مختلط وليكن ليكن:

نفرض أن X_1 متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين بمعلمة $n=3$

دالة توزيعه التراكمية F_1

نفرض X_2 متغير عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً

$X \sim N(0,1)$ دالة توزيع احتمالي تراكمي F_2

نفرض أن Y متغير عشوائي بدالة توزيع مختلط:

$$F(y)=\frac{1}{5}F_1(y)+\frac{4}{5}F_2(y)$$

والمطلوب: احسب احتمال التالي:

$P(Y=y_1)=?$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P(Y=y) = P(y \le Y \le y) = F(y) - \lim_{n\to\infty} F\left(y - \frac{1}{n}\right)$$: الحل

$$P(Y=y) = \frac{1}{5}F_1(y) + \frac{4}{5}F_2(y) - \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty} F_1\left(y-\frac{1}{n}\right) -$$

$$\frac{4}{5}\lim_{n\to\infty} F_2\left(y-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left[F_1(y) - \lim_{n\to\infty}\left(y-\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{4}{5}\left[F_2(y) - \lim_{n\to\infty} F_2\left(y-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}P(X_1=y) - \frac{4}{5}P(X_2=y)$$

$$\Rightarrow P(Y=y) = \frac{1}{5}P(X_1=y) = \left(\frac{1}{5}\right)\frac{3^y}{y!}e^{-3}$$

$\Rightarrow P(Y=y) > 0$ نلاحظ أن:

عندما $y \ge 0$ وبالتالي Y ليس متغيراً

وأيضاً:

$$\sum_{y\ge 0} P(Y=y) = \sum \frac{1}{5}\cdot\frac{3^y}{y!}e^{-3} = \frac{1}{5}e^{-3}\sum\frac{3^y}{y!}$$

$$= \frac{1}{5}e^{-3}\cdot e^{3} = \frac{1}{5} \neq 1$$

وبالتالي Y ليس متقطع.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التحويل في المتغيرات العشوائية:

ليكن X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي $f(x)$ وليكن Y متغيراً عشوائياً آخر حيث $y = h(x)$ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ما علاقة التوزيع الاحتمالي لـ Y بالتوزيع الاحتمالي لـ X ؟

1) X متغير عشوائي منفصل

X منفصل بدالة توزيع احتمالي $f(x)$ و $Y = h(x)$، دالة التوزيع الاحتمالي لـ Y هي $g(y)$ وتعطى بالعلاقة:

$$g(y) = \sum_{x \in h^{-1}(y)} f(x)$$

تمرين:

ليكن X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الرؤوس الناتجة في ثلاث قطع نقود متماثلة معاً. ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح بقيمة رمزية تساوي 1 والخسارة بقيمة رمزية تساوي 0 ربح الشخص إذا حصل على رأس واحد على الأكثر. أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y.

الحل:

مجموعة قيم X هي $\{0, 1, 2, 3\}$

دالة التوزيع الاحتمالي لـ X تتبع توزيع ثنائي الحد:

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$$

مجموعة قيم Y $Y = \{0, 1\}$

$h: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$h(0)=0$

$h(1)=h(2)=h(3)=1$

$$g(0)=\sum_{x\in h^{-1}(0)} f(x)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$g(1)=\sum_{x\in h^{-1}(1)} f(x)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{7}{8}$$

X منفصل $\Rightarrow$ Y منفصل

2) X متغير عشوائي مستمر:

$Y=h(x)$ و X متغير عشوائي مستمر مطلقاً

مثال: X متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع منتظم على المجال $[0,1]$

$$h(x)=\begin{cases}7 & ; x<\frac{3}{4}\\ 5 & ; x>\frac{3}{4}\end{cases}$$

في حالة $Y=7$ if $x\leq\frac{3}{4}$

$$P\left(X\leq\frac{3}{4}\right)=\int_0^{\frac{3}{4}}1\,dx=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(Y=7)=\frac{3}{4}$$

$Y=5$ if $x>\frac{3}{4}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$P(x>\tfrac{3}{4}) = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 1\,dx = \frac{1}{4} \iff P(y-5) = \frac{1}{4}$$

ملاحظة أخرى:

إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً مطلقاً بدالة كثافة احتمالية $f(x)$ حيث $Y=h(x)$، $h(x)$ مستمراً وطرداً تماماً (متزايد أو متناقص) على $\mathbb{R}$ وقابل للتفاضل عندئذٍ Y هو متغير عشوائي مستمر مطلقاً أيضاً بدالة كثافة احتمالية:

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{d\,h^{-1}(y)}{dy}\right|$$

مثال: $X \sim N(0,1)$ و $h(x) = Y = 2X+5$

إذا $h(x)$ متزايد على $\mathbb{R}$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

$$h(x) = y = 2x+5 \Rightarrow h^{-1}(y) = x = \frac{y-5}{2}$$

$$g(y) = f\left(\frac{y-5}{2}\right)\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(\frac{y-5}{2})^2/2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-(y-5)^2/8}$$

$$\Rightarrow Y \sim N(5,4) \Rightarrow$$

بالتالي: Y مستمر $\xleftarrow{h(x)}$ X مستمر ومطرد

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة