كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : السادسة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

السؤال الأول:

حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية بطريقة فصل المتغيرات:

$$U_t = U_{xx}$$

$$U(x,0) = 8x + 4 + 5\sin(5\pi x)$$

$$U(0,t) = 4$$

$$U(2,t) = 20$$

الحل: نفرض أن للمعادلة حل من الشكل:

$$U(x,t) = W(x,0) + \overline{U}(x,t)$$

حيث: $W(x,t)$ حل المعادلة مع الشروط غير المتجانسة

$\overline{U}(x,t)$ حل المعادلة مع الشروط الحدية المتجانسة

$$W(x) = 4 + \frac{20-4}{2}x = 4 + 8x$$

نفرض أن:

$$\overline{U}(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\overline{U}_t(x,t) = X(x)T'(t)$$

$$\overline{U}_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

نعوض في المعادلة نجد أن:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

تابع لـ t فقط تابع لـ x فقط

نعوض على المعادلتين:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

$$T'(t) - \lambda T(t) = 0 \quad \text{---} \quad (2)$$

$$u(0,t) = X(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(2,t) = X(2)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(2) = 0$$

نبدأ بحل المعادلة (1):

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda$$

نناقش حسب قيم λ:

الحالة (1): $\lambda = 0$

$$X(x) = A + Bx$$

$$X(0) = \boxed{A = 0}$$

$$X(2) = 2B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

حل صفري مرفوض.

الحالة (2): $\lambda > 0$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$X(2) = A\underbrace{\left(e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 0}$$

حل صفري مرفوض.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Leftarrow \lambda < 0$ (3)

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

$$X(0) = \boxed{A = 0}$$

$$X(2) = \underbrace{B}_{\neq 0}\sin 2\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow \sin 2\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$2\sqrt{-\lambda} = n\pi \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{4}$$

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$T_n(t) = Ce^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}$$

$$\overline{U}_n(x,t) = D_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\sin\frac{n\pi}{2}x;\quad D_n = B_n C$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$U(x,t) = 4 + 8x + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\sin\frac{n\pi}{2}x$$

$$U(x,0) = 4 + 8x + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{2}x +$$

$$= 8x + 4 + 5\sin(5\pi x)$$

بالمطابقة في أن

$$D_0 = 5,\quad D_n = 0;\ n \neq 0$$

$$U(x,t) = 4 + 8x + 5\,e^{-25\pi^2 t}\sin 5\pi x$$

$\Rightarrow$ ~~$U(x,t) = 4 + 8x + 5e^{-25\pi^2 t}\sin$~~ وهو الحل المطلوب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

السؤال الثاني:

وتر مقابض مشبع الطرفين طوله 3 كنتم إزاحة الخيط على شكل $\sin \pi x$ ثم تركه بتجربة بين الكون و $c^2 = 1$ حدد سوطع كل نقطة من نقاط الخيط باستخدام فصل المتغيرات.

الحل:

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sin \pi x$$

$$u_t(x,0) = 0$$

نفرض أن للمعادلة حل من الشكل:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

نعوض في المعادلة نجد أن:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

فنحصل على المعادلتين:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{---} \quad (1)$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0 \quad \text{---} \quad (2)$$

$$u_t(x,0) = \underbrace{X(x)}_{\neq 0} T'(0) = 0 \Rightarrow T'(0) = 0$$

$$u(0,t) = X(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u(3,t) = X(3)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow X(3) = 0$$

نبدأ بحل المعادلة ① :

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda$$

نناقش حسب قيم λ :

$\lambda = 0$ ⇐ (1)

$$X(x) = A + Bx$$

$$X(0) = \boxed{A = 0}$$

$$X(3) = 3B = 0 \Rightarrow B = 0$$

حل مرفوض

$\lambda > 0$ ⇐ (2)

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$X(3) = A\left(e^{3\sqrt{\lambda}} - e^{-3\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0$$

حل مرفوض

$\lambda < 0$ ⇐ (3)

$$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

$$X(0) = \boxed{A = 0}$$

$$X(3) = \underbrace{B}_{\neq 0}\sin 3\sqrt{-\lambda} = 0 \Rightarrow \sin 3\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$3\sqrt{-\lambda} = n\pi \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{3} \Rightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{9}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{3} x$$

$$T(t) = A \cos \frac{n\pi}{3} t + B \sin \frac{n\pi}{3} t$$

$$T'(t) = -\frac{n\pi}{3} A \sin \frac{n\pi}{3} t + \frac{n\pi}{3} B \cos \frac{n\pi}{3} t$$

$$\Rightarrow T'(0) = \frac{n\pi}{3} B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{3} t$$

$$U_n(x,t) = D_n \cos \frac{n\pi}{3} t \sin \frac{n\pi}{3} x \quad ; D_n = A_n \cdot B_n$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \frac{n\pi}{3} t \sin \frac{n\pi}{3} x$$

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{3} x = \sin \pi x$$

بالمطابقة نجد أن :

$$D_3 = 1 \quad , \quad D_n = 0 \; ; \; n \neq 3$$

$$U(x,t) = \cos \pi t \sin \pi x$$

وهو الحل المطلوب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z