كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : العاشرة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

بعض التوابع الخاصة :

(1) تابع غاما $n \geq 0$

- $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du$
- $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

- $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$, $n < 0$

(2) تابع بيسل :

$$J_n(n) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \times \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2\times4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right\}$$

حواص بيسل :

- $e^{-\frac{1}{2}t\left(u-\frac{1}{u}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)\,u^n$

معادلة بيسل يها الشكل :

$$t^2 y''(t) + t\,y'(t) + (t^2 - n^2)\,y(t) = 0$$

حل معادلة بيسل $J_n(t)$

(3) تابع الخطأ :

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

تكملة تابع الخطأ :

$$erfc(t) = 1 - erf(t)$$

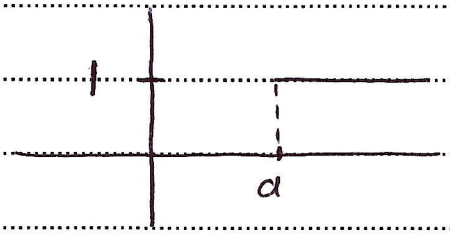
$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-u^2} du$$

(4) تابع الخطوة الواحدية : Unit step function

أي Heaviside Unit function

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < a \\ 1 & ; \quad t > a \end{cases}$$

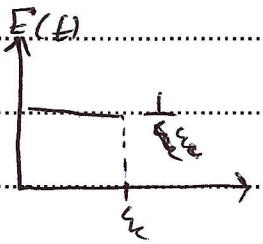
$$H(t-a)$$



(5) تابع النبضة الواحدية :

$$F_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & ; \quad 0 \le t \le \epsilon \\ 0 & ; \quad t > \epsilon \end{cases}$$

حيث $\epsilon > 0$



عندما $\epsilon \to 0$ يصبح عرض المستطيل يؤول إلى الصفر وطوله يتناقص ويكون المساحة تبقى واحدة .

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_0^\infty F_\epsilon(t)\,dt = 1$$

وهذه الفكرة مادت الهندسين والفيزيائيين التفكير بتابع نهائي عبارة عن $\delta(t)$ وهي تقريب $F_\epsilon(t)$ عندما $\epsilon \to 0$

وهو تابع النبضة الواحدية و $\delta(t)$ ديراك

خواصها تابع $\delta(t)$ *

① $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$

② $\int_0^\infty \delta(t)\,G(t)\,dt = G(a)$ تابع ستم $\forall\, G(t)$

③ $\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt = G(a)$ تابع ستم $\forall\, G(t)$

ولكن هذا التابع رياضياً غير موجود ولكن استخدامه سهل الحل

⑥ التابع الصفري أو المعدوم $N(t)$ حيث $0 < t$

$$\int_0^t N(u)\,du = 0$$

خواصه:

1. $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$

2. $\mathcal{L}(J_0(at)) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$

3. $\mathcal{L}(J_n(at)) = \dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

4. $\mathcal{L}(erfc(t)) = \frac{e^{\frac{s^2}{4}}}{s} erfc\left(\frac{s}{2}\right)$

5. $\mathcal{L}(erfc\sqrt{t}) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

6. $\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}$

7. $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

8. $\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as}$

9. $\mathcal{L}(N(t)) = 0$

10. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right) = erfc\frac{1}{2\sqrt{t}}$

11. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right) = erfc\frac{x}{2\sqrt{t}}$

تمرين: $U_x - 2U_t = U$

$U(x,0) = 6e^{-3x}$

U حدد في $x>0$ و $t>0$

الحل: بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$\Rightarrow U_x(x,s) - 2sU(x,s) + 2U(x,0) = U(x,s)$

نعوض $U(x,0) = 6e^{-3x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow U_x(x,s) - (2s+1)U(x,s) = -12e^{-3x}$$

معادلة عادية مرتبة أولى غير متجانسة ذات أمثال ثابتة

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx} = e^{-(2s+1)x}$$

$$\Rightarrow U(x,s) = e^{(2s+1)x}\left[C_1 - \int -12e^{-3x}\cdot e^{-(2s+1)x}\,dx\right]$$

$$\Rightarrow U(x,s) = C_1 e^{-(2s+1)x} + \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

U محدود عندما $x \to \infty \Leftarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow U(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

$$U(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(U(x,s)) = 6e^{-2t}e^{-3x}$$

$$U_t = cU_x = 0$$

in $(-\infty, +\infty) \times (0, \infty)$

x t

مطلوب استنتاج $U(x,t) = U_0(x-ct)$

وفق تحويل لابلاس.

تمرين: نعرض لنا خيط لانهائي الطول بدايته $x=0$ كانت في وضع الراحة على المحور $x=0$ و هذه النهاية تتحرك بشكل دوري بالمطلة $A_0 \sin \omega t$ أو هو وضع كل نقطة بين نقاطها

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اخطط في كل خطوة.

المثال:

$$U_{tt} = \alpha^2 U_{xx}$$

$$U(x,0) = 0$$

$$U_t(x,0) = 0$$

$$U(0,t) = A_0 \sin \omega t \quad , \quad t > 0, \; x \leq 0$$

$$\mathcal{L}(U(0,t)) = A_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = U(0,s)$$

$$U_{tt} = \alpha^2 U_{xx}$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Rightarrow s^2 U(x,s) - sU(x,0) - U_t(x,0) = \alpha^2 U_{xx}(x,s)$$

بتعويض الشروط الابتدائية ⇐

$$\alpha^2 U_{xx}(x,s) = s^2 U(x,s)$$

$$\Rightarrow U_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{\alpha^2} U(x,s) = 0$$

معادلة خطية عادية من رتبة ثانية ذات أمثال ثابتة ومتجانسة

باستخدام المعادلة المميزة:

$$m^2 - \frac{s^2}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{s}{\alpha}$$

$$U(x,s) = C_1 e^{\frac{s}{\alpha}x} + C_2 e^{-\frac{s}{\alpha}x}$$

$$U(0,s) = C_1 + C_2 = A_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$C_1 = 0$ ⇐ تبقى محدودة $U(x,s)$

$$\Rightarrow U(x,s) = C_2 e^{\frac{-s}{\alpha}x} \Rightarrow C_2 = A_0 \frac{\omega}{s^2+\omega^2} e^{-\frac{s}{\alpha}x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow U(x,s) = A_0 \frac{w}{s^2+w^2} e^{-\frac{s}{\alpha}x}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0 \sin\left(w\left(t-\frac{x}{\alpha}\right)\right) & , t > \frac{x}{\alpha} \\ 0 & , t < \frac{x}{\alpha} \end{cases}$$

النقطة x بين الخيط تبقى في وضع الراحة م في اللحظة $t=\frac{x}{\alpha}$ وبعدها تتحرك بنفس حركة المبدأ بخطوة في الزمن تساوي $\frac{x}{\alpha}$

تمرين:

النص: سلك معدني ناقل للحرارة طوله 2 نشبه وحرارة الطرفين على الصفر والحرارة الابتدائية هي $5\sin \pi x$

النموذج الرياضي:

$$u_t - 3u_{xx} = 0$$

$$0 < x < 2 \; ; \; t > 0$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

$$u(x,0) = 5\sin \pi x$$

الحل:

$$u_t - 3u_{xx} = 0$$

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$sU(x,s) - u(x,0) - 3U_{xx}(x,s) = 0$$

نعوض: $u(x,0) = 5\sin \pi x$

$$\Rightarrow -3U_{xx}(x,s) + sU(x,s) = +5\sin \pi x$$

$$\Rightarrow U_{xx}(x,s) - \frac{s}{3}U(x,s) = -\frac{5}{3}\sin \pi x$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مسألة تفاضلية خطية عادية مرتبة ثانية ذات شروط ثابتة غير متجانسة :

نوجد الحل المتجانس باستخدام المسألة المميزة :

$$\Rightarrow m^2 - \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow U_h = C_1 e^{-x\sqrt{\frac{5}{3}}} + C_2 e^{x\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

نوجد الحل غير المتجانس وفق طريقة المعاملات غير المعينة :

$-5/3$	$U_p = A_1 \sin \pi x + A_2 \cos \pi x$
0	$U'_p = A_1 \pi \cos \pi x - A_2 \pi \sin \pi x$
1	$U''_p = -A_1 \pi^2 \sin \pi x - A_2 \pi^2 \cos \pi x$

$$\Rightarrow -\frac{5}{3} A_1 \sin \pi x - \frac{5}{3} A_2 \cos \pi x - A_1 \pi^2 \sin \pi x - A_2 \pi^2 \cos \pi x = \frac{-5}{3} \sin \pi x$$

بالمطابقة :

$$-A_1 \sin \pi x \left[\frac{5}{3} + \pi^2\right] = -\frac{5}{3} \sin \pi x$$

$$\Rightarrow A_1 \left[\frac{5+\pi^2 3}{3}\right] = \frac{5}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{5}{5+3\pi^2}$$

بالمطابقة :

$$-A_2 \cos \pi x \left[\frac{5}{3} + \pi^2\right] = 0 \cos \pi x$$

$$\Rightarrow -A_2 \left[\frac{5}{3} + \pi^2\right] = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow U_p = \frac{5}{s+3\pi^2} \sin \pi x \Rightarrow U(x,s) = U_h + U_p$

$\Rightarrow U(x,s) = C_1 e^{-x\sqrt{\frac{s}{3}}} + C_2 e^{x\sqrt{\frac{s}{3}}} + \frac{5}{s+3\pi^2} \sin \pi x \quad (*)$

(1) $\mathcal{L}(u(0,t)) = U(0,s) = 0$ & $\mathcal{L}(u(2,t)) = U(2,s) = 0$ (2)

$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$ من (1) في (*)

$C_1 (e^{-2\sqrt{\frac{s}{3}}} - e^{2\sqrt{\frac{s}{3}}}) = 0$ من (2) في (*)

$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow U(x,s) = \frac{5}{s+3\pi^2} \sin \pi x \Rightarrow$ بأخذ معكوس لابلاس

$u(x,t) = 5 \sin \pi x \, e^{-3\pi^2 t}$

النهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة