كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : التاسعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تحويل لابلاس للاشتقاقات:

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(x))$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) \dots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

مباشرة باعطاء الشروط الابتدائية يتم تحويل لابلاس للاشتقاق

$$(*)\ \mathcal{L}(y'(x)) = sY(s) - y(0)$$

$$(**)\ \mathcal{L}(y''(x)) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

مثال:

$y' - 5y = 0$; $\mathcal{L}(0) = 0$

$y(0) = 2$

$sY(s) - 2 - 5Y(s) = 0$

$$Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

نطبق لابلاس العكسي:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}\left(\frac{2}{s-5}\right) = 2e^{5x}$$

~~$\mathcal{L}(y_x)$~~

* باستخدام $\mathcal{L}(y_x) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{dy}{dx}\, dx$ هام!

- نكامل بالتجزئة:

$$= e^{-sx} y(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-sx} y(x)\, dx$$

$$= -y(0) + s\,Y(s) = sY(s) - y(0)$$ بتبسيط

- $\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$

$$= e^{-sx}\frac{dy}{dx}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s)e^{-sx}\frac{dy}{dx}\,dx$$ (تكامل بالتجزئ)

$$= -y'(0) + s\,\mathcal{L}(y_x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y''(x)) = -y'(a) + s^2 Y(s) - sy(0)$$

استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلات التفاضلية الجزئية :

- $\mathcal{L}(u(x,t)) = U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt$

- $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = sU(x,s) - u(x,0)$
- $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$

- $\mathcal{L}(u_x(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}u_x(x,t)\,dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\,dt$

$$= \frac{\partial}{\partial x}U(x,s) = U_x(x,s)$$

- $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = U_{xx}(x,s)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

خواص إضافية لتحويل لابلاس :

① $\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$ ← البرهان مطلوب

② $\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$

وظيفة ③ $\mathcal{L}\left(\frac{\sin at}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$

④ $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & ; \ t > a \\ 0 & ; \ t < a \end{cases}$

$\mathcal{L}(f(t)) = \hat{f}(s)$

⑤ $\mathcal{L}(g(t)) = e^{-as}\hat{f}(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(e^{-as}\hat{f}(s)) = g(t)$ ← البرهان :

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\, 0\, dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt}_{\text{نغير المتحول}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(m+a)} f(m)\,dm$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-m} f(m)\,dm \Rightarrow$$

$$= e^{-sa}\hat{f}(s)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

④ $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\hat{f}(s))$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left((-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\hat{f}(s)\right) = t^n f(t)$

مثال: $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right)$

$F(s) = \hat{f}(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)$

$\hat{f}'(s) = \frac{-2s}{s^4} \cdot \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)$ تجزئة كسور

$\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}'(s)) = -2(1-\cos t) = t f(t)$

حسب كوانين لابلاس

$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{t}(1-\cos t)$

• $\mathcal{L}^{-1}(\hat{f}(as)) = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$

(المرهان مطلوب)

مثال: $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$

$y(1) = 0$

$y'(1) = 0$

$z = x+1 \Rightarrow dz = dx$

$y'_x = y'$ & $y''_x = y''$

$\Rightarrow y''_z - 3y'_z + 2y_z = e^{-z-1}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين:

$$\Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{e}\frac{1}{s+1}$$

بتعويض الشروط:

$$\Rightarrow Y(s)[s^2 - 3s + 2] = \frac{1}{e(s+1)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{e}\frac{1}{(s+1)(s^2-3s+2)} = \frac{1}{e}\frac{1}{(s+1)(s-1)(s-2)}$$

بتحليل بطريقة الكسور:

$$Y(s) = \frac{1}{e}\left[\frac{-1/2}{s-1} + \frac{1/3}{s-2} + \frac{1/6}{s+1}\right]$$

نطبق لابلاس العكسي:

$$y(x) = \left[\frac{-1}{2}e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x}\right]\cdot\frac{1}{e} = \frac{-1}{2}e^{x-1} + \frac{1}{3}e^{2x-1} + \frac{1}{6}e^{-x-1}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-1}{2}e^{x-2} + \frac{1}{3}e^{2x-3} + \frac{1}{6}e^{-x}$$

طريقة حل نفس المثال ولكن مع الشرط: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

مثال:

$$y'' + 4y' + 8y = \sin x$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$Y(s)(s^2+4s+8) = \frac{1}{s^2+1} + s + 4$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)} + \frac{s+4}{(s^2+4s+8)}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)} = \frac{\frac{-4}{65}s + \frac{7}{65}}{s^2+1} + \frac{\frac{4}{65}s + \frac{9}{65}}{s^2+4s+8}$$

$$= \frac{\frac{-4}{65}s + \frac{7}{65}}{s^2+1} + \frac{\frac{4}{65}s + \frac{9}{65}}{(s+2)^2+(2)^2}$$

$$\frac{s+4}{s^2+4s+8} = \frac{s+4}{(s+2)^2+(2)^2} = \frac{s+2+2}{(s+2)^2+(2)^2}$$

إتمام المربع الكامل

$$\Rightarrow y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right)$$

$$= -\frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\sin x + \frac{4}{65}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{130}e^{-2x}\sin 2x$$

$$+ e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\sin 2x$$

مثال:

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(x,0) = 3\sin 2\pi x$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$0 < x < 1 \quad , \quad K = 1$$

الحل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$sU(x,s) - u(x,0) = U_{xx}(x,s)$$

$$U_{xx}(x,s) - sU(x,s) = -3\sin 2\pi x$$

معادلة تفاضلية عادية خطية من رتبة ثانية:

$$m^2 - s = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{s}$$

$$U_h(x,s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

$-s$	$U_p = A\cos 2\pi x + B\sin 2\pi x$
0	$U_p' = -2\pi A\sin 2\pi x + 2\pi B\cos 2\pi x$
1	$U_p'' = -4\pi^2 A\cos 2\pi x - 4\pi^2 B\sin 2\pi x$

$$-4\pi^2 A\cos 2\pi x - 4\pi^2 B\sin 2\pi x - As\cos 2\pi x - Bs\sin 2\pi x$$

$$B\sin 2\pi x = -3\sin 2\pi x$$

$$-4\pi^2 A - As = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$-4\pi^2 B - Bs = -3 \Rightarrow \boxed{B = \frac{3}{4\pi^2 + s}}$$

$$U_p = \frac{3}{4\pi^2 + 5}\sin 2\pi x$$

$$\Rightarrow U(x,s) = C_1 e^{\sqrt{s}x} + C_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{4\pi^2 + s}\sin 2\pi x$$

نطبق تحويل لابلاس على الشرطين:

$$\mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{0}{s} = 0$$

$$\mathcal{L}(u(1,t)) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}(u(0,t)) = U(0,s) = C_1 + C_2 = 0 \\ \mathcal{L}(u(1,t)) = U(1,s) = C_1 e^{\sqrt{s}} + C_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$U(x,s) = \frac{3}{s+4\pi^2} \sin 2\pi x$$

$$u(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z