كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تحويل لابلاس:

سيتم تحويل لابلاس كل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة.

سيتم كل المعادلات التفاضلية وذلك بتخفيض رتب المشتقات حيث تحول المعادلة التفاضلية العادية إلى معادلة جبرية، المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة عادية

* مبدأ إيجاد الحل سيكون بثلاث خطوات:

1- تحويل المسألة المعطاة (الجزئية) إلى مسائل بسيطة (جبرية)

2- حل المسألة البسيطة بطرق جبرية.

3- تحويل حل المعادلة البسيطة مرة أخرى بطريقة لابلاس العكسية للعودة إلى المسألة المعطاة.

أي باتباع المخطط التالي:

تفاضلية عادية ← نطبق عليها لابلاس ← حل معادلة جبرية ← نطبق لابلاس العكسي ← حل معادلة تفاضلية عادية.

* التحويل فقط للقيم الموجبة.

* نعرف تحويل لابلاس العكسي بالشكل:

ليكن $f(x)$ معرف من أجل $x \geq 0$ فيكون تحويل لابلاس لـ f معرف بالشكل:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f(x)\, e^{-sx}\, dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)\, e^{-sx}\, dx$$

* التكامل السابق هو تكامل معتل وبالتالي يمكن أن يكون متقارب أو متباعد.
* عندما يكون متقارب يكون تحويل لابلاس موجود.
* إذا كان التكامل غير متقارب نقول إن التابع لا يملك تحويل لابلاس.

ملاحظة: هذا التحويل يعمل على الدوال المعرفة على المجال $[0,\infty)$

* بعض خواص تحويل لابلاس:

① الخطية:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(x)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(x)\}$$
$$= c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

②

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)x} f(x)\, dx = F(s-a)$$

③

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

البرهان:

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} x^n f(x)\,dx = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$ حيث n عدد صحيح موجب ؛

(4) إذا كان $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ موجودة كان :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = \int_s^\infty F(m)\,dm$$

البرهان:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f(x) e^{-sx}\,dx$$

$$= \int_0^\infty f(x) \int_s^\infty e^{-mx}\,dm\,dx = \int_0^\infty \int_s^\infty f(x) e^{-mx}\,dm\,dx$$

$$= \int_s^\infty F(m)\,dm$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(m)\,dm\right] = \frac{1}{s} F(s) \qquad (5)$$

البرهان :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(m)\,dm\right) = \int_0^\infty \int_0^x f(m)\,dm\, e^{-sx}\,dx$$

بالتكامل بالتجزئة

$u = \int_0^x f(m)\,dm$ $\qquad dv = e^{-sx}\,dx$

$du = (f(x) - 0)\,dx$ $\qquad v = -\frac{1}{s} e^{-sx}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow -\frac{1}{s}\int_0^x f(m)\,dm\,e^{-sx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(x)\,e^{-sx}\,dx$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty f(x)\,e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a} \quad (6)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}(e^{ax}) = \int_0^\infty e^{ax}e^{-sx}\,dx = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)x}\Big|_0^\infty$$

$$= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s},\ s>0 \quad (7)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty e^{-sx}\,dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2} \quad (8)$$

البرهان

$$\mathcal{L}(x^1) = (-1)^1\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}(e^{ax}x^n) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a \quad (9)$$

البرهان بالاعتماد على المعادلتين (3), (6):

$$\mathcal{L}(e^{ax}x^n) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= (-1)^n (-1)^n \cdot \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \qquad (10)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-sx}\, dx = \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) / s^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

$$\mathcal{L}(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \qquad (11)$$

البرهان:

$$\mathcal{L}(\sqrt{x}) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-sx}\, dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) / s^{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

$$\mathcal{L}(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad ; \quad s > 0 \qquad (12)$$

البرهان: باعتماد على (3)

$$\mathcal{L}(e^{ax} \cdot x^n) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(13)

$$\mathcal{L}(\sin ax) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad ; \quad s > 0$$

البرهان كما يلي:

$$\sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}(\sin ax) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{iax}) - \mathcal{L}(e^{-iax})\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{s+ia-s+ia}{s^2+a^2}\right] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\mathcal{L}(\cos ax) = \frac{s}{s^2+a^2}$; $s>0$ (14)

البرهان حسب أولى :

$\cos ax = \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2} \Rightarrow$

$\mathcal{L}(\cos ax) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iax}) + \mathcal{L}(e^{-iax})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+ia+s-ia}{s^2+a^2}\right] = \frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}(e^{ax}\sin wx) = \frac{w}{(s-a)^2+w^2}$ (15)

$\mathcal{L}(e^{ax}\cos wx) = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$ (16)

برهان 15 ، 16 مطلوب وسيتم حلهما لاحقاً

باستخدام على (14) ← باستخدام على (13) (2) →

$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_s^\infty \frac{1}{m^2+1}\,dm = \tan^{-1}(m)\Big|_s^\infty$ (17)

$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s)$

(تحويل لابلاس لـ $\sin x$ هو $\frac{1}{s^2+1}$)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تحويل لابلاس العكسي :

تحويل لابلاس العكسي لـ $F(s)$ هو تابع $f(x)$ بحيث

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(x)$$

★ تقنية إيجاد التحويل العكسي يعتمد على الذاكرة والمحاولة.

★ إذا كان $F(s)$ ليس بشكل معروف عندها نهيء كتابته حتى يصبح بشكل معروف.

خواص التحويل العكسي :

① الخطية

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1 F(s) + c_2 G(s)) = c_1 \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + c_2 \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

② مأخوذ الالتفاف : (★)

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-m)\, g(m)\, dm$$

وتحقق الخواص :

1- تبديلي : $f * g = g * f$

2- تجميعي : $(f * g) * h = f * (g * h)$

3- توزيعي :

$$f * (c_1 g + c_2 h) = c_1 f * g + c_2 f * h$$

تحويل لابلاس للالتفاف :

$$\mathcal{L}((f * g)(x)) = \mathcal{L}(f(x)) \cdot \mathcal{L}(g(x))$$

$$(f * g)(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)\, G(s))$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال : على الدرس السابق :

$$\frac{1}{s^2-5s+6} = \frac{1}{(s-2)(s-3)}$$

$$1/(s-2) = \mathcal{L}(e^{2x})$$

$$1/(s-3) = \mathcal{L}(e^{3x})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)(s-2)}\right) = e^{3x} * e^{2x}$$

$$= \int_0^x e^{3(x-m)} e^{2m}\, dm = \int_0^x e^{3x-m}\, dm = \left[-e^{3x-m}\right]_0^x$$

$$= -e^{2x} + e^{3x}$$

مثال آخر : (بطريقة الكسور)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right)$$

$$= \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}$$

مثال وظيفة :

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-x} \cdot x \cdot \cos 2x)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z