كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

حل معادلة التوصيل الحراري مع شروط بدئية حدية :

$$u_t = k\,u_{xx}$$

(نأخذ كهايات معزولة)

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$$

$$u_x(x,0) = f(x) \quad ; \quad t \geq 0 \,,\; 0 < x < \ell$$

نفرض أن لها حل بن الشكل :

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$u_x(x,t) = X'(x)\,T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$$

$$u_t(x,t) = X(x)\,T'(t)$$

نعوض فيها: $X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{T'(t)}{k\,T(t)}}_{\text{تابع لـ } T \text{ فقط}} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{تابع لـ } x \text{ فقط}} = \lambda$$

نحل على المعادلتين

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \& \quad T' - k\lambda T = 0$$

$$u_x(x,t) = X'(x)\,T(t)$$

$$u_x(0,t) = X'(0)\,\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{X'(0) = 0}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$u_x(l,t) = X'(l)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{X'(l) = 0}$

$X(x) = A + Bx$

نناقش الحالات الآتية :

$\lambda = 0$ (1)

$X'(x) = B, \quad X'(0) = B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$X'(l) = B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0} \Rightarrow \boxed{X(x) = A}$

$\lambda > 0$ (2)

$X(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$X'(x) = \sqrt{\lambda} A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda} B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$X'(0) = \sqrt{\lambda}(A_1 - B_1) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = B_1}$

$X'(l) = \sqrt{\lambda} A_1 e^{l\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} B_1 e^{l\sqrt{\lambda}} = 0$

$\Rightarrow X'(l) = A_1 \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\underbrace{\left(-e^{-\sqrt{\lambda}l} + e^{\sqrt{\lambda}l}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 0}$

$\boxed{A_1 = B_1 = 0}$ حل صفري مرفوض

$\lambda < 0$ (3)

$X(x) = A_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + B_1 \sin\sqrt{-\lambda}x$

$X'(x) = -A_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}x + B_1\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x$

$X'(0) = B_1\underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = 0}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$X'(l) = -A_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$
($A_1 \neq 0$, $\sqrt{\lambda} \neq 0$)

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{-n^2\pi^2}{l^2}$$

$$X = A_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$u(x,t) = C_{xt} \cos \frac{n\pi}{l} x \, e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kT}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx$$

$n = 1, \ldots$

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\, dx$$

معادلة لابلاس (ناقصية):

$$\Delta u = 0$$

تعد معادلة لابلاس من أهم المعادلات التفاضلية في المجالات التطبيقية حيث أنها تظهر في كثير من الحلول الرياضية والفيزيائية حيث أنها تظهر في ميكانيك السوائل وميكانيك الجسم الصلب والهندسة والاحتمالات وغيرها كثير كمثال على نموذج رياضي حيث يأتي لمعادلة لابلاس

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

معادلة التوصيل الحراري المستقلة عن الزمن

$$\Delta u = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حلول معادلة لابلاس تسمى بالتوابع التوافقية:

harmonic functions

- معادلة بواسون: هي معادلة لابلاس مع طرف ثاني

$$\Delta u = f(x,y)$$

* ملاحظة (1):

معادلة لابلاس لا تحوي على متحول t (الزمن) وبالتالي ندرسها حلها فقط وفق العتم الحدية وليست الابتدائية.

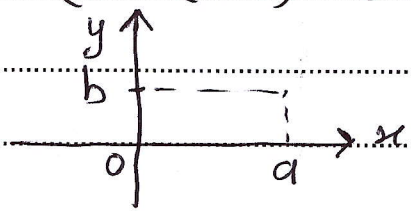
* ملاحظة (2):

المعادلة التكاملية الموجودة في المعادلة التفاضلية هي تتحقق لكل الفضاء x,y فقط وكلا طرفي المرتبة الثانية لذلك كل أية العتم الحدية المتلقة معادلة لابلاس تتاج لأربع شروط حدية شرطين حسبين لكل متحول تقريباً.

حل بأية العتم الحدية المتلقة معادلة لابلاس:

ليكن لدينا لدينا مجموعة نقط مستطيل

$$\Omega = \{(x,y);\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$$



ويكون لدينا شروط برخلية الحدية:

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= f_1(y) \\ u(a,y) &= f_2(y) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le y \le b$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= g_1(x) \\ u(x,b) &= g_2(x) \end{aligned}\right\} \quad 0 \le x \le a$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

سنستخدم طريقة فصل المتغيرات ولكن طريقة فصل المتغيرات تكون أبسط عندما تكون الشروط الحدية متجانسة.

لحل معادلة لابلاس على المنطقة S نحل 4 مسائل قيم حدية في كل منها سنأخذ ثلاث شروط حدية متجانسة.

I
$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \\ U(0,y)=f_1(y) \\ U(a,y)=U(x,0)=U(x,b)=0 \end{cases}$$

II
$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \\ U(a,y)=f_2(y) \\ U(0,y)=U(x,0)=U(x,b)=0 \end{cases}$$

III
$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \\ U(x,0)=g_1(x) \\ U(x,b)=U(0,y)=U(a,y)=0 \end{cases}$$

IV
$$\begin{cases} U_{xx}+U_{yy}=0 \\ U(x,b)=g_2(x) \\ U(x,0)=U(0,y)=U(a,y)=0 \end{cases}$$

ونكتب $U_i(x,y)$; $i=1,2,3,4$ حل المسائل السابقة على الترتيب وبالتالي يكون حل مسألتنا الأصلية:

$$U(x,y)=U_1(x,y)+U_2(x,y)+U_3(x,y)+U_4(x,y)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في كل واحدة من المسائل التالية نطبق طريقة فصل المتغيرات
لنجد u_n ومن ثم نأخذ المجموع لنحصل على u_x

- حل الثالثة:

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y)$$

$$u_{xx}=X''\,Y$$

$$u_{yy}=X\,Y''$$

$$X''Y+XY''=0 \Rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{-Y''}{Y}=\lambda$$

($\frac{X''}{X}$: تابع لـ x فقط — $\frac{-Y''}{Y}$: تابع لـ y فقط)

$$X''-\lambda X=0 \quad \& \quad Y''+\lambda Y=0$$

$$u(x,0)=X(x)\,Y(0)=0 \Rightarrow \boxed{Y(0)=0}$$

($X(x)\neq 0$)

$$u(0,y)=X(0)\,Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(0)=0}$$

$$u(a,y)=X(a)\,Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(a)=0}$$

$$m^2-\lambda=0$$

نناقش الحالات:

$\lambda=0$ (1)

$$X(x)=Ax+B$$

$$X(0)=B=0$$

$$X(a)=Aa=0 \Rightarrow A=0$$

} الحل الصفري مرفوض

$\lambda>0$ (2)

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X(0)=A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$X(a) = A\left(e^{\sqrt{\lambda}a} - e^{-\sqrt{\lambda}a}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$ ($\neq 0$)

$B = 0$

الحل الصفري مرفوض

$\lambda < 0$ (ج)

$X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}\,x + B\sin\sqrt{-\lambda}\,x$

$X(0) = A = 0$

$X(a) = B\sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\,a = 0$

$\sqrt{-\lambda}\,a = n\pi \Rightarrow \lambda = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}$

$m^2 + \lambda = 0$

$m^2 = -\lambda$

$Y_n(y) = a_n e^{\sqrt{-\lambda}\,ny} + b_n e^{-\sqrt{-\lambda}\,ny}$

بوضعنا الحالي هذه لا تغير سنوضح التوابع القطعية لأننا لا نستطيع تعيين قيمة أحد الثوابت بسبب تعويض $y = 0$

$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,ny + B_n \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,ny$

$Y_n(0) = A_n = 0$

$Y_n(y) = B_n \sinh\sqrt{-\lambda}\,ny$

$U_n(x,y) = D_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$

$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u(x,b) = g_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$D_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$D_n = \frac{2}{a}\int_0^a g_2(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \left(\sinh\frac{n\pi}{a}b\right)^{-1}$$

- طريقة الحل لأية المعادلة:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$u_{xx} = X''Y$$

$$u_{yy} = XY''$$

$$u(a,y) = f_1(y)$$

$$u(0,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$$

$$X(a)\underbrace{Y(y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \boxed{X(a) = 0}$$

$$X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(0) = 0}$$

$$X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow \boxed{Y(b) = 0}$$

نناقش الحالات:

الحالة ① $\lambda = 0$

$$Y(y) = Ay + B$$

$$Y(0) = B = 0$$

$$Y(b) = Ab \Rightarrow A = 0$$

} الحل الصفري مرفوض

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lambda < 0$ (2)

$$Y(y) = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y}$$

$$Y(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$Y(b) = A\left(e^{\sqrt{\lambda}b} - e^{-\sqrt{\lambda}b}\right) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0$$

($e^{\sqrt{\lambda}b} - e^{-\sqrt{\lambda}b} \neq 0$)

الحل الضعيف غير منسوخ

$\lambda > 0$ (3)

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}\,y + B\sin\sqrt{\lambda}\,y$$

$$Y(0) = A = 0$$

$$Y(b) = B\sin\sqrt{\lambda}\,b = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\,b = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\,b = n\pi$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

$$Y_n(y) = B\sin\frac{n\pi}{b}y$$

نحل X:

$$X'' - \lambda X = 0$$

$$m^2 = \lambda > 0$$

$$X_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n}x} + b e^{-\sqrt{\lambda_n}x}$$

$$= A_n \cosh\frac{n\pi}{b}x + B_n \sinh\frac{n\pi}{b}x$$

وهنا لا يغيرنا بالحل

$$\Rightarrow X_n(x) = A_n \cosh\frac{n\pi}{b}(x-a) + B_n \sinh\frac{n\pi}{b}(x-a)$$

الآن نأتي بشروط الحدية:

$$X_n(a) = A_n = 0$$

$$X_n(x) = B_n \sinh\frac{n\pi}{b}(x-a)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi}{b}(x-a) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

نعوض الشرط الثاني في y:

$$u(0,y) = f_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{-n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ثابت

$$B_n \sinh \frac{-n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^{\pi} f_1(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy$$

$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^{\pi} f_1(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy \left(\sinh \frac{n\pi a}{b}\right)^{-1}$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z