كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثالثة**

المادة : معادلات تفاضلية جزئية

المحاضرة : السادسة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

أنواع الشروط الحدية :

(1) شروط ديريخلية Direchlet

تعطى بدلالة قيمة التابع عند الحدود.

(2) شروط نيومن Neumen

تعطى بدلالة مشتق التابع عند الحدود.

(3) شروط روبن Roben

تعطى بدلالة قيمة التابع ومشتقاته عند الحدود.

طريقة فصل المتغيرات لحل المعادلات التفاضلية الجزئية :

طريقة فصل المتغيرات تفرض أن الحل يمكن كتابته على شكل جداء توابع كل منها تابع لمتحول واحد فقط، أي نفرض $u = u(x_1, \dots, x_n)$ حلاً وصولاً إلى الأجوبة المطلوبة فإن طريقة فصل المتغيرات تفرض أن هذا الحل يمكن كتابته على شكل جداء توابع.

$$u = X_1(x_1)\, X_2(x_2) \dots X_n(x_n)$$

وبالتعويض عن هذا الحل بالشكل السابق في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة نجد أن $X_1(x_1) \dots X_n(x_n)$ تحقق معادلات تفاضلية عادية يمكن حلها وبالتالي يمكن إيجاد الدوال $X_1(x_1) \dots X_n(x_n)$ وبأخذ الجداء لهذه الدوال نحصل على حل المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مثال:

$$u_{xx} - u_x = u_t$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$u_x = X'(x)\,T(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)\,T(t)$$

$$u_t = X(x)\,T'(t)$$

نعوض:

$$X''(x)\,T(t) - X'(x)\,T(t) = X(x)\,T'(t)$$

نقسم على $X(x)\,T(t)$

$$\frac{X''(x) - X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}$$

(2) ← ثابت لـ x فقط — (1) ← ثابت لـ t فقط

فمنها (1) و(2) ← وبالتالي الطرفة السابقة تساوي ثابت وليكن λ

$$\Rightarrow \frac{X''(x) - X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\Rightarrow X''(x) - X'(x) = \lambda X(x) \quad \& \quad T'(t) = \lambda T(t)$$

$$X'' - X' - \lambda = 0 \qquad T(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$m^2 - m - \lambda = 0$$

هذور لما

$$\Delta = 1 + 4\lambda$$

منناقش مع قيم λ

$$\lambda > \frac{-1}{4} \Leftarrow 1 + 4\lambda > 0 \Leftarrow \Delta > 0 \quad (1)$$

$$X(x) = Ae^{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} + Be^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}x}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \underbrace{AC}_{C_1} e^{\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} e^{\lambda t} + \underbrace{BC}_{C_2} e^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}x} e^{\lambda t}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lambda < \frac{-1}{4} \Leftarrow 1+4\lambda < 0 \Leftarrow \Delta < 0$ (2)

$$X(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x\right)$$

$$u(x,t) = e^{\frac{1}{2}x}e^{\lambda t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{-(1+4\lambda)}}{2}x\right)$$

$\lambda = -\frac{1}{4} \Leftarrow \Delta = 0$ (3)

$$X(x) = (A+Bx)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$u(x,t) = (C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}e^{\lambda t}$$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u(x,y) = X(x)Y(y)$

$u_{xx} = X''(x)Y(y)$

$u_{yy} = X(x)Y''(y)$

نعوض: $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

نقسم على $X(x)Y(y)$: $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$

تابع لـ x فقط — تابع لـ y فقط

$X'' - \lambda X = 0$ و $Y'' + \lambda Y = 0$

$m^2 - \lambda = 0$

$m^2 = \lambda$

نرا ع الحالات:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

① $\lambda > 0$:

$$X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

$$Y(y) = C \cos\sqrt{\lambda} y + D \sin\sqrt{\lambda} y$$

$$u(x,y) = X(x) Y(y) = (A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x})(C \cos\sqrt{\lambda} y + D \sin\sqrt{\lambda} y)$$

② $\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

$$Y(y) = Cy + D$$

$$u(x,y) = X(x) Y(y) = (Ax + B)(Cx + D)$$

③ $\lambda < 0$:

$$X(x) = A \cos\sqrt{-\lambda} x + B \sin\sqrt{-\lambda} x$$

$$Y(x) = C e^{\sqrt{-\lambda} y} + D e^{-\sqrt{-\lambda} y}$$

$$u(x,y) = X(x) Y(y) = (A \cos\sqrt{-\lambda} x + B \sin\sqrt{-\lambda} x)(C e^{\sqrt{-\lambda} y} + D e^{-\sqrt{-\lambda} y})$$

حل معادلة النقل بطريقة فصل المتغيرات :

$$u_t + C u_x = 0$$

مثال → $u_t - 3 u_x = 0$

$$u(0,x) = \frac{1}{2} e^{-2x} \quad ; \ t > 0$$

الحل → $u(t,x) = X(x) T(t)$

$$u_t = X(x) T'(t)$$

$$u_x = X'(x) T(t)$$

نعوض : $X(x) T'(t) - 3 X'(x) T(t) = 0$

نقسم : $\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$T' - 3\lambda T = 0$ & $X' - \lambda X = 0$

خطية مرتبة أول

$T(t) = C_1 e^{3\lambda t}$, $X(x) = C_2 e^{\lambda t}$

$u(t,x) = C e^{\lambda(3t+x)}$

$u(0,x) = \frac{1}{2} e^{-2x} = C e^{\lambda x}$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$, $\lambda = -2$

$\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{2} e^{-2(3t+x)}$

مسألة التوصيل الحراري بطريقة فصل المتغيرات:

* ملاحظة: طريقة فصل المتغيرات يكون أنجح مع شروط حدية متجانسة.

$u_t = \alpha^2 u_{xx}$

$u_t = K u_{xx}$

مع شروط حدية:

$u(0,t) = T_0$, $u(x,0) = f(x)$

$u(\ell,t) = T_\ell$

* ملاحظة مهمة جدا:

- إذا كان $\bar{u}$ حل معادلة التوصيل الحراري حل خاص يحقق الشروط الحدية المتجانسة

$\bar{u}(0,t) = 0$

$\bar{u}(\ell,t) = 0$

- ولكن w حل معادلة التوصيل الحراري المستقل عن الزمن والذي يحقق الشروط الحدية:

$w(0,t) = T_0$

$w(\ell,t) = T_\ell$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$W(x) = T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x$$

$u = \bar{u}_{(x,t)} + W(x)$ هو أيضاً حل لمعادلة التوصيل الحراري (هو تركيب خطي لحلول المعادلة الخطية هو أيضاً حل)

$$u(0,t) = \bar{u}(0,t) + W(0) = T_0$$

$$u(\ell,t) = \bar{u}(\ell,t) + W(\ell) = T_\ell$$

وبالتالي يحقق معادلة التوصيل الحراري الحقق الشروط الحدية

نكتب الحل على شكل مجموع:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + W(x)$$

$\bar{u}$: نحلها بطريقة فصل المتغيرات.

W : من القانون:

$$W(x) = T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x$$

نوجد

$$\bar{u}(0,t) = \bar{u}(\ell,t) = 0$$

$$\bar{u}(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$u_t = XT'$$

$$u_{xx} = X''T$$

نعوض بالمعادلة:

$$XT' = k\,X''T$$

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (1) \qquad \& \qquad T' - \lambda kT = 0 \quad (2)$$

مثلاً

$$\bar{u}(0,t) = X_0\,T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$$

$T(t) \neq 0$

$$\bar{u}(\ell,t) = X(\ell)\,T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(\ell) = 0}$$

$T(t) \neq 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda$

نراعي الحالات :

$\lambda = 0$ ①

$X(x) = ax + b$

الحل الصفري مرفوض

$X(0) = 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$

$X(l) = al + 0 = 0 \Rightarrow a = 0$

$\lambda > 0$ ②

$m^2 = \lambda > 0$

$m_{1,2} = \mp\sqrt{\lambda}$

$X(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$

$X(0) = A + B = 0$ (1)

$X(l) = A e^{\sqrt{\lambda} l} + B e^{-\sqrt{\lambda} l}$ (2) $\Rightarrow A = -B$ في (1)

$A\left(e^{\sqrt{\lambda} l} - e^{-\sqrt{\lambda} l}\right) = 0$

$\neq 0$

الحل الصفري مرفوض $\Rightarrow A = 0$

$B = 0$

$\lambda < 0$ ③

$X(x) = A \cos\sqrt{-\lambda}\, x + B \sin\sqrt{-\lambda}\, x$

$X(0) = A = 0$

$X(l) = B \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0$

$B \neq 0 \Rightarrow \sin\sqrt{-\lambda}\, l = 0$

$\sqrt{-\lambda}\, l = n\pi$

$\lambda = \frac{-n^2\pi^2}{l}$

$\Rightarrow X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l} x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حل تابع الزمن (2) من T :

$$T(t) = Ce^{\lambda k t} = Ce^{\frac{-n^2\pi^2}{\ell^2} kt}$$

$$\bar{u}_n = C_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x \; e^{\frac{-n^2\pi^2}{\ell^2} kt}$$

$$\bar{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x \; e^{\frac{-n^2\pi^2}{\ell^2} kt}$$

حل u :

$$* \quad u(x,t) = w(x) + \bar{u}(x,t) = T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x \; e^{\frac{-n^2\pi^2}{\ell^2} kt}$$

نعوض بالشرط الابتدائي :

$$u(x,0) = T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x = f(x)$$

$$f(x) - \left(T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{\ell} x$$

بشكل فورييه :

$$** \quad C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \left(f(x) - \left(T_0 + \frac{T_\ell - T_0}{\ell} x\right)\right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x \, dx$$

بالتالي يكون حل المعادلة الحرارية الثنائية الأبعاد يعطى بالعلاقة

** و *

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z