كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : برمجة رياضية

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

التكامل يمكن أن يكون محدود أو غير محدود ، وللتكامل في كل حالة من هاتين الحالتين ثلاثة أنواع :

١) التكامل الأحادي رمزه $\int$.
٢) التكامل الثنائي (السطحي) رمزه $\iint$.
٣) التكامل الثلاثي (الحجمي) $\iiint$.

<u>التكامل غير المحدود في برنامج الماثيماتكا :</u>

1) التكامل الأحادي :

$$\int f(x)\,dx \longrightarrow Integrate\,[\,f,x\,]$$

2) التكامل الثنائي (السطحي):

$$\iint f(x)dxdy \longrightarrow Integrate\,[\,f,x,y\,]$$

3) التكامل الثلاثي (الحجمي) :

$$\iiint f(x)dxdydz \longrightarrow Integrate\,[\,f,x,y,z\,]$$

<u>التكامل المحدود في برنامج الماثيماتكا :</u>

١) التكامل الأحادي :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \longrightarrow NIntegrate\,[\,f,\{x,x_1,x_2\}\,]$$

٢) التكامل الثنائي :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dydx \longrightarrow NIntegrate\,[\,f,\{x,x_1,x_2\},\{y,y_1,y_2\}]$$

٣) التكامل الثلاثي (الحجمي) :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dzdxdx \quad \longrightarrow$$

3	2	1

$$NIntegrate\ [\, f, \{x, x_1, x_2\}, \{y, y_1, y_2\}, \{z, z_1, z_2\}]$$

3	2	1

لاحظ ترتيب العمليات في التكامل .

ملاحظة هامة :

يمكن في التكامل المحدود استخدام التعليمة $Integrate$ ويعطي البرنامج عندها الناتج بشكل كسر أو جذر .

أمثلة :

١) $\int x\, dx$

$\text{Integrate}[x, x]$

$\boxed{\frac{x^2}{2}}$

٢) $\int_e^{\pi} Cos(x)dx$

$\text{NIntegrate}[\text{Cos}[x], \{x, E, \text{Pi}\}]$

$\boxed{-0.410781}$

٣) $\iint (x^2 + y)dydx$

$\text{Integrate}[x\verb|^|2 + y, x, y]$

$\boxed{\frac{1}{6} y(2x^3 + 3xy)}$

٤) $\int \int_{lnx}^{logx} (x^2 + y)dydx$

$\text{Integrate}[x\verb|^|2 + y, x, \{y, \text{Log}[x], \text{Log}[10, x]\}]$

$$-\frac{١}{18\text{Log}[10]^2}x(-1+\text{Log}[10])(18(1+\text{Log}[10])-x^2\text{Log}[100]-3(6+6\text{Log}[10]-x^2\text{Log}[100])\text{Log}[x]+9(1+\text{Log}[10])\text{Log}[x]^2)$$

٥) $\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^1\int_5^4 (x^2+y+4z^3)dzdydx$

Integrate$[x\text{^}2+y+4z\text{^}3,\{y,0,1\},\{x,x\text{^}2,\text{Sqrt}[x]\},\{z,4,5\}]$

$$\boxed{\frac{1}{6}(2217\sqrt{x}+2x^{3/2}-2217x^2-2x^6)}$$

٦) $\int\sqrt{x^2+a^2}\ dx$

Integrate$[\text{Sqrt}[x\text{^}2+a\text{^}2],x]$

$$\boxed{\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{2}a^2\text{Log}\left[x+\sqrt{a^2+x^2}\right]}$$

ملاحظة:

في المثال الخامس لم نستخدم N مع التكامل لأن الجواب ليس عددي وإنما بدلالة x .

تمرين :

احسب مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

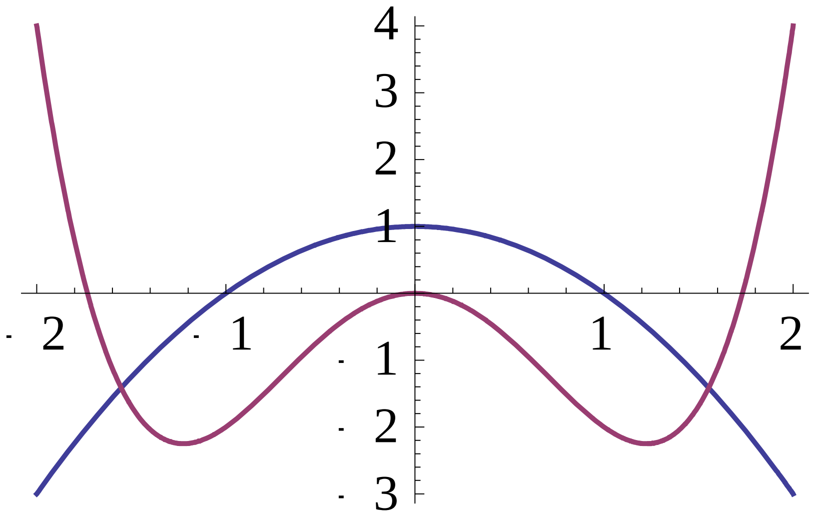
$f(x)=1-x^2$ ، $g(x)=x^4-3x^2$

الحل :

$f[\text{x\_}]=1-x\text{^}2;$

$g[\text{x\_}]=x\text{^}4-3x\text{^}2;$

Plot$[\{f[x],g[x]\},\{x,-2,2\}]$



points = Solve$[f[x] == g[x], x]$

$\{\{x \to -i\sqrt{-1+\sqrt{2}}\}, \{x \to i\sqrt{-1+\sqrt{2}}\}, \{x \to -\sqrt{1+\sqrt{2}}\},$
$\{x \to \sqrt{1+\sqrt{2}}\}\}$

$\{a, b, c, d\} = x/.$points

$\{-i\sqrt{-1+\sqrt{2}}, i\sqrt{-1+\sqrt{2}}, -\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\}$

NIntegrate$[f[x] - g[x], \{x, c, d\}]$

4.486647532296413

نعلم أن معادلة المستوي المماس لسطح معطى بالعلاقة $f(x,y,z) = 0$ في النقطة (x_0, y_0, z_0) تُعطى بالعلاقة :

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

تمرين :

حدد معادلة المستوي المماس للسطح $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ في النقطة $(1, 2, 3)$
ثم ارسم السطح و المستوي المماس .

الحل :

السطح المعطى هو سطح كرة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{14}$ ومعادلتها تُعطى بالعلاقة :

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$$

$f[\mathrm{x\_,y\_,z\_}] := x^\wedge 2 + y^\wedge 2 + z^\wedge 2 - 14;$

$a = \mathrm{Derivative}[1,0,0][f][1,2,3](x-1);$

$b = \mathrm{Derivative}[0,1,0][f][1,2,3](y-2);$

$c = \mathrm{Derivative}[0,0,1][f][1,2,3](z-3);$

$d = \mathrm{Solve}[a+b+c == 0, z]$

$\{\{z \to \frac{1}{3}(14 - x - 2y)\}\}$

$\mathrm{g1} = \mathrm{Graphics3D}[\mathrm{Sphere}[\{0,0,0\}, \mathrm{Sqrt}[14]]];$

$\mathrm{g2} = \mathrm{Plot3D}[1/3\,(14 - x - 2y), \{x, -5,5\}, \{y, -5,5\}];$

$\mathrm{Show}[\mathrm{g1}, \mathrm{g2}]$