كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٣

المحاضرة : التاسعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين: ادرس التقارب النقطي والتقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال الآتية:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x\rho^{-nx}$

الحل: بما أنه يوجد في هذه السؤال أن نأخذ متسلسلة المجاميع الجزئية

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x\rho^{-nx} = x + x\rho^{-x} + x\rho^{-2x} + \dots + x\rho^{-nx}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{\rho^x} + \left(\frac{1}{\rho^x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{\rho^x}\right)^n\right]$$

هندسية أساسها $|q| = \left|\frac{1}{\rho^x}\right| < 1$

المتسلسلة متقاربة نقطياً

نفرض أن التقارب هو تقارب منتظم:

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\frac{1 - \left(\frac{1}{\rho^x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\rho^x}}\right| x \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{x}{1-\rho^x}$$

ملاحظة: في الامتحان نكتب شرط التقارب المنتظم كاملاً

$$|f_n(x) - F(x)| = \left|\frac{x\left(1 - \left(\frac{1}{\rho^x}\right)^{n+1}\right) - x}{1 - \frac{1}{\rho^x}}\right| = \left|\frac{-\left(\frac{1}{\rho^x}\right)^{n+1}}{\frac{\rho^x - 1}{\rho^x}}\right|$$

$$= \frac{x}{e^{x(n+1)}} \cdot \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^{nx}(e^x - 1)} < \varepsilon$$

$$\frac{x}{\varepsilon} < e^{nx}(e^x - 1)$$

$$\frac{x}{\varepsilon(e^x - 1)} < e^{nx} \longrightarrow \ln\left(\frac{x}{\varepsilon(e^x - 1)}\right) < nx \Rightarrow \frac{1}{x} \ln \frac{x}{\varepsilon(e^x - 1)} < n$$

$\Rightarrow$ هذا مرفوض لأنه $N = N(\varepsilon, x)$

ومنه التقارب ليس منتظم وهو تقارب نقطي فقط.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \; ; \; |x| < 1$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^k} = 1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

متسلسلة هندسية

$$q = \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{2}} \longrightarrow$$

الأساس متقارب

نفرض أن التقارب هو تقارب منتظم

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{x}{2}}\right| = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{\frac{2 - x}{2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \times \frac{2}{2-x} = \frac{x^{n+1}}{2^n} \times \frac{1}{2-x} < \varepsilon$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{x}{2-x} < \varepsilon \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^n < \varepsilon \cdot \frac{2-x}{x}$$

$$n \ln \frac{x}{2} < \ln\left(\varepsilon \cdot \frac{2-x}{x}\right) \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon\left(\frac{2-x}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

وهذا صحيح لأنه $N = N(\varepsilon, x)$ والتقارب غير منتظم وهو تقارب نقطي فقط.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) \; ; \; x \in \mathbb{R}^*$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)$$

نوجد متتالية المجاميع الجزئية

$$= x(1-x) + x^2(1-x) + \cdots + x^n(1-x)$$
$$= (x - x^2) + (x^2 - x^3) + \cdots + (x^n - x^{n+1})$$
$$= x - x^{n+1}$$

عندما $x = 1$

$$S_n(x) = \lim_{n \to \infty} (x - x^{n+1}) = 0$$

متقاربة.

عندما $x > 1$

$$\lim_{n \to \infty} (x - x^{n+1}) = -\infty$$

متباعدة

عندما $x = -1$

$$\lim_{n \to \infty} (x - x^{n+1}) \Longrightarrow \begin{cases} -2 & \leftarrow n \text{ فردي} \\ 0 & \leftarrow n \text{ زوجي} \end{cases}$$

غير ما لانهاية

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لما نابياته مختلفتانه لايوجد نظرية مهنى مساعدة

$x<-1$

$\lim_{n\to\infty}(x-x^{n+1}) = \mp\infty$

n زوجية

$x=-2 \Leftarrow -2-(2)^{+\infty} = -\infty$

متباعدة

$|x|<1$

$\lim_{n\to\infty}(x-x^{n+1}) = x$

متقاربة

نفرض جدلاً أنه التقارب منتظم.

$|f_n(x)-f(x)| = |x-x^{n+1}-x| = |x|^{n+1} < \varepsilon$

$(n+1)\ln(x) < \ln\varepsilon$

نقسم على $\ln x$

$|x|<1 \rightarrow \ln(x)<0 \quad ; \quad n+1 < \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$

$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} - 1$

$N = N(\varepsilon, x)$

الفرضية خاطئة لأنه التقارب غير منتظم نقطياً فقط.

انتهت المحاضرة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z