كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : الثامنة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التمرين الأول: إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتان كيفيتان من نقاط الفضاء المتري (E,d) بيّن أنّ (U_n) متقاربة في (E,d) من نقاط ما وفقط إذا كان $\lim_{n\to\infty} d(U_n,V_n)=0$

ولتحقق أنّ المتتالية (V_n) تكون متقاربة من النقطة (U_0) أيضاً.

بما أنّ U_n متقاربة من U_0 في (E,d) بالتالي فإنّ المتتالية المديد $d(U_n,U_0)$ متقاربة من الصفر في $(R,|.|)$

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n,U_0)=0$$

بالتالي V_n و U_n و U_0 نقاط في الفضاء $(R,|.|)$

$$d(V_n,U_0)\le d(V_n,U_n)+d(U_n,U_0)$$

$$0\le d(V_n,U_0)\le d(V_n,U_n)+d(U_n,U_0)$$

$$0\le \lim_{n\to 0} d \le \lim_{n\to+\infty} d+d$$

$$0\le \lim_{n\to+\infty}(V_n,U_0)\le 0+0$$

حسب حصر هنة الواحدة

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n,U_0)=0$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

التمرين الثاني: $U_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2n+1}\right)$ لنتحقق كون المتتالية

$U_n = \left(n, \frac{n}{n+1}\right)$ محدودة في الفضاء المتري الإقليدي

أم لا. $(\mathbb{R}^2, d)$

$$U_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{2n+1}\right)$$

$$A = \left\{(1, \tfrac{1}{3}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{5}), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{7}), \dots\right\}$$

$$B((0,0), 2)$$

$$B((0,0), 2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < 1 \quad \text{(1)}$$

$$\frac{n}{2n+1} < 1 \Rightarrow \frac{n^2}{(2n+1)^2} < 1 \quad \text{(2)}$$

بجمع (1) و (2) نجد أن:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{(2n+1)^2} \leq 1+1 \leq 2 \leq 4 \Rightarrow A \subseteq B((0,0), 2)$$

$\Leftarrow$ المتتالية (U_n) محدودة.

$$U_n = \left(n, \frac{n}{n+1}\right)$$

نلاحظ أن:

في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n متتالية غير متقاربة

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ونعلم أنه تكون المتتالية متقاربة

بسبب أنه تكون كل مركبات متتاليات متقاربة في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

بما أنّ $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ ← متتالية $1/n$ غير متقاربة.

التمرين الثاني: نتحقق من كون كلّ من المجموعات

(1) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<25\}$ محدودة في الفضاء المتري الاقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$ أم لا.

(2) $B=\{(x,y,z) , x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

لنتحقق كون A ، B مجموعات محدودة أم لا:

① المجموعة A هي عبارة عن كرة مفتوحة مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 5

$A=N((0,0,0),5)\subseteq B((0,0,0),5) \Rightarrow A\subseteq B((0,0,0),5)$

← A مجموعة محدودة

② $B=\Gamma\cup M$

$\Gamma=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2\leq 4\}=B((0,0,0),2)$

$M=\{(x,y,z), x^2+y^2+z^2>1\}$

لنأخذ متممة M

$M=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2<1\}$

$=N((0,0,0),1)$

$B=\Gamma\setminus M' \Rightarrow B((0,0,0),2)\setminus N((0,0,0),1)\subseteq B((0,0,0),2)$

$B\subseteq B((0,0,0),2)$

← B مجموعة محدودة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التمرين الرابع: إذا كانت E مجموعة كيفية منتهية فإن تبولوجيا المتماثلة المنتهية على E هي التبولوجيا القوية $T = P(E)$

الإثبات:

إذا كانت E مجموعة منتهية فإن أي مجموعة منطلقة ستكون منتهية فرض تحقق شرط التبولوجيات المنتهية الاحتواء الأول

$T \subseteq P(E)$ ـــــ (I)

لأن $P(E)$ هي التبولوجيا القوية فرض تحوي أي تبولوجيا على E ← الاحتواء الأول محقق

الاحتواء الثاني:

$P(E) \subseteq T$ ـــــ (II)

لتكن $T \in P(E)$ ← T مجموعة منتهية ← E/T منتهية ← $T \in T$ وبما أن T مجموعة كيفية من $P(E)$ ← $P(E) \subseteq T$

من (I) و (II) نجد أن $T = P(E)$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z