كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا١

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات

السنة: الثانية — المحاضرة: 7 عملي

المادة: توبولوجيا 1

التمرين الأول:

(X,d) فضاء متري جزئي من فضاء (E,d) و A مجموعة من الفضاء (X,d) والمطلوب تحقق مما يأتي

① $A'_X = A'_E \cap X$ ② $\overline{A}_X = \overline{A}_E = A_E \cap X$

③ $A^\circ_X \supset A^\circ_E \cap X$ ④ $A^\circ_X \subset A^\circ_E \cap X$ (غير صحيح بشكل عام)

الإثبات:

① لإثبات صحة العلاقة 1 يجب أن نثبت احتوائين

I. $A'_X \subset A'_E \cap X$

* لتكن x نقطة كيفية من نقاط A'_X وهذا يعني أن $x \in X$ و أن:

$\forall \mathcal{U}^* \in \mathcal{V}^*(x)$ $\quad \mathcal{U}^* \cap A \neq \varphi \setminus \{x\}$

ولنبين أن $x \in A'_E$ ولتكن $\mathcal{V}$ مجاورة لـ x في الفضاء (E,d) حسب العلاقة بين المجاورات في الفضاء الجزئي والكلي نجد أن: $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cap X$

من هنا بما أن:

$\mathcal{U}^* \cap A \neq \varphi \setminus \{x\}$

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap X \cap A \neq \varphi \setminus \{x\}$

وبما أن $A \subset X$ نجد أن

$\mathcal{U} \cap A \neq \varphi \setminus \{x\}$

ومنه نجد أن $x \in A'_E$ وبمراعاة الاختيار الكيفي لـ x

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من A'_X نجد أنه $A'_X \subset A'_E \cap X$ والاحتواء الأول محقق.

الاحتواء الثاني: $A'_E \cap X \subset A'_X$

لنأخذ نقطة كيفية $x \in A'_E \cap X$ وهذا يعني أنه $x \in X$ و $x \in A'_E$ ومن تعريف نقطة التراكم

$\forall \ell \cap A + \varphi \neq \{x\} \quad \forall \ell \in \nabla_E(x)$

ولتكن ℓ^* مجاورة لـ x في الفضاء الجزئي (X,d) حيث

العلاقة التي تربط بين المجاورات في الفضاء الكلي

$\ell^* = \ell \cap X$ نجد أن (X,d) الفضاء الجزئي (E,d)

$\Rightarrow \ell^* \cap A = \ell \cap X \cap A = \ell \cap A + \{x\}, \varphi$

ومن نجد أنه $x \in A'_X$ مع مراعاة الاختيار الكيفي لـ x من

$A'_E \cap X \subset A'_X$ ---- (II) نجد أنه $A'_E \cap X$

ومن الاحتواء الثاني محقق ومنه نجد أنه $A'_X = A'_E \cap X$

$\overline{A}_X = \overline{A}_E \cap X$ (2)

نعلم أنه $\overline{A} = A' \cup A$ ولدينا من العلاقة (1)

$A'_X = A'_E \cap X$

نأخذ علاقة الاجتماع مع

$A'_X \cup A = (A'_E \cap X) \cup A$

$\overline{A}_X = (A'_E \cup A) \cap (X \cup A)$

$\overline{A}_X = \overline{A}_E \cap X$

(3) A°_E هي مجموعة مفتوحة بالفضاء الكلي لذلك:

$A^\circ_E \cap X$ مجموعة مفتوحة بالفضاء الجزئي (X,d) وذلك

حسب العلاقة التي تربط المجموعات المفتوحة في الكلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مع المجموعات المفتوحة في الجزئي ومع ملاحظة

$A_E^\circ \cap X \subset A_E^\circ \subset A$ ، $A_E^\circ \subset A$

ومنه $A_E^\circ \cap X \subset A$ وبما أن A_X° أكبر مجموعة

مفتوحة محتواة في A ← $A_E^\circ \cap X \subset A_X^\circ$

(4) الكي نثبت أن الملاحظة غير صحيحة يكفي أن نأخذ

مثال ينقض هذه الحالة:

المثال: في الفضاء المتري العادي لتكن $X = [1,12]$ إذا

أخذنا $A = X$ فرضاً مجموعة مفتوحة في الجزئي $(X,1,1)$ لذلك

فإن $A_p^\circ = [1,12]$ ولكن $A_X^\circ = A = [1,12]$ ومنه

$A_p^\circ \cap X =]1,12[\cap [1,12] =]1,12[$

لذلك $[1,12] \notin]1,12[$

ومنه $A_X^\circ \not\subset A_p^\circ \cap X$

التمرين الثاني:

لنأخذ في الفضاء المتري $(R,1,1)$ الفضاءين الجزئيين $(N,1,1)$ ، $(\quad,1,1)$ ولنأخذ المجموعات:

$A =]-2,2[$ ، $B =]1,4[$ ، $C = \{2,5,11\}$

المطلوب: عيّن كلاً من:

(1) $A =]-3,12]$ ، $A']-3,12]$

(2) $\overline{B}$ $]-3,12]$

(3) $\overline{N}$ ، $C'N$

الحل:

(1) نعلم أن $\overline{Ax} = \overline{A} \cap X$ هي أصغر مجموعة مغلقة

$\overline{A}$ ؟ A محتواة فيها (أي مجال مغلق هو مجموعة مغلقة)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\overline{A}^R = [-2,2] \Rightarrow \overline{A}^{]-3,12[} = \overline{A}^R \cap X = [-2,2] \cap]-3,12[$

$= [-2,2]$

$A' = \overline{A}^{]-3,12[} = A' \cup A$

$[-2,2] = A' \cup]-2,2[$

$2,2 \in A' \cup]-3,12[$

نبرهن نقاط A

بأخذ $x \in A =]-2,2[$ نقطة كيفية ولنأخذ الكرة المفتوحة

$N(x,\rho) :=]x-\rho, x+\rho[$

$N(x,\rho) \cap A =]x-\rho, x+\rho[\cap]-2,2[$

تقاطع مجالين مفتوح هو مجال مفتوح يحوي عدد لانهائي

من النقاط $N(x,\rho) \cap A \neq \rho, \{x\}$

$\Leftarrow x \in A' =]-3,12[$

وبما أن x كيفية من A بالتالي $A \subset A' =]-3,12[$

ومنه $A' =]-3,12[= [-2,2]$

(2)

$\overline{B}^{]-3,12[} = \overline{B}^R \cap X$

أصغر مجموعة مغلقة تحوي B $\overline{B}^R = ?$

$B =]1,4] \Rightarrow \overline{B}^R = [1,4]$

$\overline{B}^{]-3,12[} = [1,4] \cap]-3,12[= [1,4]$

(3)

$\overline{C \cap N} = \overline{C}^R \cap N$

لإثبات C مغلقة $\overline{C}^R = C \longrightarrow$

$\overline{C \cap N} = C \cap N = \{2,5,11\} \Rightarrow \overline{C \cap N} = C' \cap N \cup C$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\{2,5,11\} = C' \cap \mathcal{U}\{2,5,11\}$

ومنه نبرهن نقاط C

ولنأخذ $2 \in C \Rightarrow N(2,1)$

كرة مفتوحة وهي مجاورة لـ 2

$2 \in N(2,1) \Rightarrow N(2,1) =]1,3[=]1,3[$

$N(2,1) \cap C =]1,3[\cap \{2,5,11\} = \{2\}$.

$2 \notin A'$

وبنفس الطريقة نبرهن الـ 5 و 11 نجد أنه

$C' \cap = \Phi$.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة