كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تبولوجيا عامة١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

العلاقة بين المجموعات المغلقة في الفضاء الجزئي والكلي:

ليكن (X,d) فضاء أجزئياً من الفضاء المتري (E,d) ولتكن A مجموعة كيفية من نقاط الفضاء الجزئي (X,d) عندئذٍ تكون المجموعة A مغلقة في الفضاء الجزئي (X,d) إذا وفقط إذا وجدت مجموعة مغلقة في (E,d) مثل F بحيث يكون $A=F\cap X$

البرهان:

لدينا بالفرض A مجموعة مغلقة في (X,d) والمطلوب إيجاد مجموعة مغلقة في الفضاء الكلي (E,d) مثل F بحيث $A=F\cap X$

* بما أن A مجموعة مغلقة في (X,d) $\Leftarrow$ $X\setminus A$ مجموعة مفتوحة في (X,d) عندئذٍ حسب العلاقة بين المجموعات المفتوحة في الفضاء بين الجزئي والكلي (E,d) مثل G بحيث يكون $X\setminus A=G\cap X$

نأخذ متممة الطرفين بالنسبة لـ X

$$A=X\setminus(G\cap X)=(X\setminus G)\cup(X\setminus X)=X\setminus G$$
$$=(E\setminus G)\cap X=F\cap X$$

أي أنه أمكننا إيجاد مجموعة مغلقة في (E,d) هي $F=E\setminus G$

بمعنى أنّ $A=FnX$ ولدينا بالفرض A مجموعة كيفية في (X,d) يعني أنّه توجد مجموعة مغلقة في (E,d) مثلاً F تحقق $A=FnX$

ولنبيّن أنّ A مجموعة مغلقة في (X,d)

نأخذ متمم الطرفين $A=FnX$

$$X\setminus A=X\setminus F=(E\setminus F)\cap X=G\cap X$$

وبذلك تكون $X\setminus A$ مجموعة مفتوحة في (X,d) متمم A مغلقة في (X,d)

مثال هامّ: X مجموعة مغلقة في (E,d) و A مجموعة كيفية من نقاط (X,d) عندئذٍ تكون A مجموعة مغلقة في (X,d) إذا وفقط إذا كانت A مغلقة في (E,d) وذلك لأنّه

A مجموعة $\Leftrightarrow$ (E,d) مجموعة مغلقة في $A=FnX$ ويوجد F

مغلقة في (X,d)

- بما أنّ X مغلقة في (E,d) $\Leftarrow$ A مغلقة في (E,d)

لأنّ A تقاطع مجموعتين مغلقتين في (E,d)

المتتاليات المتقاربة والفضاءات المتريّة التامّة:

تعريف: ليكن (E,d) فضاءً متريّاً كيفياً ندعو تطبيق

$$U:\mathbb{N}\to E$$

متتالية من نقاط الفضاء المتريّ (E,d) ويرمز لها بالرمز (U_n) أو $\{U_n\}$

مثال: $\left(U_n=\frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ متتالية من نقاط الفضاء المتريّ $(\mathbb{R},|\cdot|)$ لأنّ $U_n=\left(\frac{1}{n},\frac{n}{2n+1}\right)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

متتاليات من نقاط الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2, d)$

تعريف: إذا كانت (U_n) متتالية من نقاط الفضاء المتري (E,d) وكانت U_0 نقطة مفروضة من نقاط (E,d) يقال عن المتتالية (U_n) أنها متقاربة في (E,d) إذا وفقط إذا كانت من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً ε يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يكون $d(U_n, U_0) < \varepsilon$ وذلك أياً كان $n \geq n_0$ وتسمى عندئذ النقطة U_0 نهاية المتتالية

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U_0 \quad (U_n - U_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (U_n)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} ; d(U_n, U_0) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

ملاحظات ونتائج:

① حالة خاصة:

إذا كان $E = \mathbb{R}$ ، $d = |\cdot|$ يصبح شرط تقارب المتتالية (U_n) من U_0 في $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} ; |U_n - U_0| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0)$$

وهو شرط تقارب المتتاليات الحقيقية المعروف في التحليل الرياضي.

② إذا كانت (U_n) متتالية من نقاط الفضاء المتري (E,d) يقال أن المتتالية (U_n) متقاربة في (E,d) إذا وفقط إذا وجدت نقطة U_0 في (E,d) بحيث $\lim_{n\to\infty} U_n = U_0$

مبرهنة: إذا كانت (U_n) متتالية كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) وكانت U_0 نقطة مفروضة في (E,d) فإننا نلاحظ أن $d_1 = d(U_1, U_0) \in \mathbb{R}^+$ ، $d_2 = d(U_2, U_0) \in \mathbb{R}^+$ ، ... ، $d_n = d(U_0, U_n) \in \mathbb{R}^+$ ، ...

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وبذلك نحصل على متتالية من الأعداد الحقيقية $An=\{d(Uo,Un)\}$ نسميها المتتالية العددية الموافقة للمتتالية (Un)

3) لتكن (Un) متتالية كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) و $Uo\in E$ نقطة مفروضة عندئذٍ تتقارب المتتالية (Un) نحو Uo من (E,d) إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية العددية الموافقة $\{d(Un,Uo)\}$ في $(R,|.|)$ من الصفر

نظرية: إذا كانت (Un) متتالية كيفية من نقاط الفضاء المتري (E,d) و $Uo\in E$ نقطة مفروضة عندئذٍ تتقارب المتتالية Un في الفضاء المتري (E,d) نحو Uo إذا وفقط إذا انتمت جميع حدود المتتالية Un باستثناء عدد منتهي منها إلى أية مجاورة V للنقطة Uo في (E,d)

نتيجة: تتقارب المتتالية الكيفية Un في (E,d) إذا وفقط إذا انتمت جميع حدود المتتالية باستثناء عدد منتهي منها إلى أية مجموعة مفتوحة G بحيث $Uo\in G$

نتيجة 2: تتقارب المتتالية الكيفية (Un) في (E,d) من $Uo\in E$ إذا وفقط إذا انتمت جميع حدودها باستثناء عدد منتهي منها إلى أية كرة مفتوحة $V(Uo,\rho)$

نظرية: إذا كانت (Un) متتالية من نقاط فضاء متري (E,d) بحيث أن (Un) تتقارب في (E,d) فإنها نظيرة وحيدة نفرضها أن Un تتقارب من نظيرتين

البرهان: لنفرض أن المتتالية (Un) تتقارب في (E,d) من نقطتين Uo و Vo بما أن (E,d) فضاء متري فإن النتيجة تتقارب

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تتقارب U_n في (E,d) من U_0 إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية العددية الموافقة $\{d(U_n,U_0)\}$ في $(\mathbb{R},|\cdot|)$ من الصفر أي أن

$d(U_n,U_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ، $d(U_n,V_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

* اصبح لدينا U_0 و V_0 و U_n و V_n ثلاث نقاط في فضاء متري (E,d) حسب خواص تابع المسافة

$0 \le d(U_0,V_0) \le d(U_0,U_n) + d(U_n,V_0)$

$0 \le d(U_0,V_0) \le 0 + 0$

$U_0 = V_0 \iff d(U_0,V_0) = 0$ ⟸

وبذلك تكون النظرية وجيهة إذ أنه برهنت

تعريف: لتكن A مجموعة كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) يقال عن المجموعة A أنها محدودة في (E,d) إذا وفقط إذا وجدت كرة مغلقة مثل $B(a,r)$ في (E,d) بحيث أن

$A \subset B(a,r)$.

نتيجة: إن أي كرة مغلقة $B(a,r)$ من E هي مجموعة محدودة في أي فضاء متري (E,d)

مثال: $A=]2,4[$ مجموعة محدودة في الفضاء المتري العادي $(\mathbb{R},|\cdot|)$ لأنه توجد الكرة المغلقة

$A=]2,4[\subset [2,4] = B(4,1)$

تعريف: لتكن U_n متتالية كيفية من نقاط فضاء متري (E,d) يقال أن المتتالية (U_n) متتالية محدودة في الفضاء (E,d) إذا وفقط إذا كانت مجموعة قيم $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ مجموعة محدودة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المتاليتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = \frac{n}{2n+1}$ و $v_n = n^2$

الحالة: دراسة (u_n)

$\{u_n / n \in \mathbb{N}\} \subset [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[\subset [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

ولدينا $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ كرة مغلقة في الفضاء $(R,|.|)$ إذا مجموعة قيم المتالية (u_n) محدودة في $(R,|.|)$

* دراسة v_n

$\{v_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \{1, 4, 9, \ldots\}$

هذه مجموعة غير محدودة لأنه أياً كان $a \in \mathbb{R}$ و $r > 0$ لا يمكن تحقق العلاقة $\{v_n / n \in \mathbb{N}\} \subset B(a,r)$

وبذلك تكون المتالية (v_n) غير محدودة في الفضاء $(R,|.|)$

مثال: في الفضاء $(\mathbb{R}, d)$ المنقطع تكون $\mathbb{R}$ مجموعة محدودة لأنه $B(a,2) = \mathbb{R}$

نظرية: إن أية متالية متقاربة في أي فضاء متري (E,d) هي متالية محدودة.

نتيجة: إن عكس النظرية غير صحيح بالضرورة.

مثال: لنأخذ في الفضاء المتري المعتاد $(R,|.|)$ المتاليتين $u_n = (-1)^n$ و $v_n = \frac{n}{n+1}$

الحالة: دراسة u_n

مجموعة قيم u_n هي $\{-1, 1\} \subset B(0,2) =]-2, 2[$

إذاً المتالية (u_n) محدودة لأنه مجموعة قيمها محدودة.

* لنلاحظ أنه إذا كان $\lim_{n \to \infty} u_n = -1$ نلاحظ أنه توجد كرة مفتوحة هي $V(-1) =]-2, 0[$ لا تحوي جميع حدود

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

باستثناء عدد منتهي فإن أياً كان n عدداً طبيعياً منتهياً فإن 2n عدد طبيعي زوجي منتهي إذاً لا يمكن فإن:

$U_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \notin N(-1;1)$.

إذاً لا يمكن فإن المتتالية (U_n) غير متقاربة فإن $U_0 = -1$ وبنفس الطريقة نجد أن (U_n) غير متقاربة من $U_0 = +1$ ومنه (U_n) متتالية محدودة ولكنه غير متقاربة.

$\forall n$ لدينا V_n

$\{V_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset [\frac{1}{2}; 1[\subset [\frac{1}{2}; 1]$

ي (V_n) متتالية محدودة لأنه محصورة قيمها محدودة وهي متقاربة فإن $\lim_{n \to \infty} V_n = 1$ لأنه المدد 1

نتيجة: تكون x نقطة الصقة لـ A في (E,d) إذا وفقط إذا وجدت متتالية (U_n) من نقاط A بحيث (U_n) متقاربة في (E,d) من x.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة