كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

نقول عن المعادلة أنها متجانسة بالنسبة لـ x, y, y' إذا عوضنا كل x بـ λx وكل y بـ λy و كل y'' بـ $\frac{1}{\lambda} y''$ و y' تبقى نفسها

$y'' \frac{d^2y}{dx^2}$ ← $\frac{1}{\lambda} y''$

$y''' \frac{d^3y}{dx^3}$ ← $\frac{1}{\lambda^2} y'''$

$$F\left(\lambda x, \lambda y, y', \frac{1}{\lambda} y'', \ldots, \frac{1}{\lambda^{n-1}} y^{(n)}\right)$$

$$= \lambda^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

$\lambda = \frac{1}{x}$

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \ldots, x^{n-1}y^n\right) = 0$$

لما نفرضه $z = \frac{y}{x}$

مثال:

$$x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$$

هذه المعادلة ليست خطية لوجود الجداءات

$$xy'' = \left(\frac{y}{x} - y'\right)\left(\frac{y}{x} - y' - 1\right)$$

$y = Z.x \Longleftarrow Z = \frac{y}{x}$

$y' = xZ' + Z$

$y'' = 2Z' + xZ''$

نضرب بـ x

$2xZ' + x^2Z'' = (Z - xZ' - Z)(Z - xZ' - Z - 1)$

$= xZ'(xZ' + 1)$

$x^2Z'' + xZ' - x^2Z'^2 = 0$

معادلة خطية خالية من Z ومتباينة بالنسبة لـ x

$x = e^t$

$xZ' = Z'_t$

$x^2Z'' = Z''_t - Z'_t$

$Z''_t - Z'_t + Z'_t - Z'^2_t$

$Z''_t - Z'^2_t = 0$

معادلة خطية

بفرض $Z'_t = u$ ونعوض Z المتحول

$Z''_t = uu'_z$

$uu'_z - u^2 = 0$

نقسم على $u \Longleftarrow$

$u'_z - u = 0$

$\frac{du}{u} = dz$

$Ln(u) = z + Ln(cc)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$u = c_1 e^z$ ، $u = \frac{dz}{dt}$

نضع u مكانه $\frac{dz}{dt}$ ونقسم على e^z

$e^{-z} dz = c_1 dt \longrightarrow e^{-z} = -c_1 t - c_2$

$-z = \ln(-c_1 t - c_2)$

$y = x \ln c - c_1 \ln x - c_2$

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المراتب العليا:

نقول عنه معادلة تفاضلية من المرتبة n أو خطية إذا كانت $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ من الدرجة الأولى ولا تحوي جداءات من الشكل

$yy', y'y'', \ldots$

وتكتب على الشكل:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = R(x)$$

معادلة خطية ذات أمثال متغيرة

- إذا كانت جميع الأمثال من $a_1, \ldots, a_n$ ثوابت (غير تابعة لـ x)

سميت المعادلة خطية ذات امثال ثابتة

$R(x) = 0$ سميت بالمعادلة الخطية المتجانسة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف المؤثر التفاضلي (D)

نعرّض D بالشكل $D=\frac{d}{dx}$ ، $D^2=\frac{d^2}{dx^2}$ ، $D^n=\frac{d^n}{dx^n}$

$$D^k y=\frac{d^k y}{dx^k}=y^{(k)}$$

تكتب المعادلة بدلالة المؤثر التفاضلي:

$$(D^n+aD^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=R(x)$$

$$\Phi(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a$$

$\Phi(D)$ كثيرة حدود D من الدرجة n

$\Phi(D)y=R(x)$ معادلة خطية غير متجانسة

$\Phi(D)y=0$ معادلة خطية متجانسة

بعض خواص المؤثر التفاضلي D:

1) تأثيرها على تابع أسي هو $\Phi(D)e^{ax}$ $\Phi(a)e^{ax}$

2) $\Phi(D^2)\cos ax=\Phi(-a^2)\cos ax$

3) $\Phi(D^2)\sin ax=\Phi(-a^2)\sin ax$

4) $\Phi(D)e^{ax}u(x)=e^{ax}\Phi(D+a)u(x)$

5) $\Phi(D)(f_1(x)+f_2(x))=\Phi(D)f_1(x)+\Phi(D)f_2(x)$

6) $(\Phi_1(D)+\Phi_2(D))f(x)=\Phi_1(D)f(x)+\Phi_2(D)f(x)$

7) $(\Phi_1(D)\Phi_2(D))f(x)=\Phi_1(D)(\Phi_2(D)f(x))$
$=\Phi_2(D)(\Phi_1(D)f(x))$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = R(x) \quad \text{---(1)}$$

معادلة خطية من المرتبة الثانية غير المتجانسة:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{---(2)}$$

معادلة خطية متجانسة من المرتبة (2).

نظرية 1:

إذا كانت $y_1(x)$ ، $y_2(x)$ حلين للمعادلة المتجانسة 2 فإن التركيب الخطي لهذين الحلين هو أيضاً حل للمعادلة 2. حيث $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

$y_1(x)$ حل لـ 2

$$y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \quad \text{---} *$$

$y_2(x)$ حل لـ 2 $\Leftarrow$

$$y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0 \quad \text{---} **$$

بضرب * بـ c_1 ، ** بـ c_2 وبجمعهما

$$(c_1y_1'' + c_2y_2'') + a_1(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

$c_1y_1 + c_2y_2$ حل لـ 2

تعريف: ليكن y_1 و y_2 دالتان قابلتان للاشتقاق ومعرّفتان على مجال ما نعرّف محدد رونسكي

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

نظرية 2: الشرط اللازم والكافي لكي يكون y_1, y_2 مرتبطان خطياً إذا كان محدد رونسكي معدوم على كامل مجال التعريف، وإذا كان محدد رونسكي غير معدوم على الأقل

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

في نقطة منه ≠ مجال التعريف يكون y_1 و y_2 مستقلين خطياً

نظرية 3: إذا كانت a_1 و a_2 دوال مستمرة فإنه يوجد

y_1 و y_2 حليين مستقلين خطياً للمعادلة (2) وكل

حلة المعادلة (2) يمكن أن يوضع على شكل تركيب خطي

لهذين الحليين

نتيجة: بمعرفة حليين خاصين y_1 و y_2 مستقلين خطياً

لـ (2) يكون الحل العام للمعادلة 2 على شكل تركيب خطي

لـ y_1, y_2 $\Leftarrow$ $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$

معادلات تفاضلية خطية من المرتبة الثانية ذات

الأمثال الثابتة:

الشكل العام $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$

حسب النظرية 3 يوجد حليين مستقلين خطياً للمعادلة

(3).

لإيجاد هذين الحليين نلاحظ أنه هذه المعادلة هي

علاقة خطية بين y و y' و y'' والدالة التي يمكن أن

تحقق مثل هذه العلاقة هي الدالة الأساسية وذلك

من أجل قيم معينة لـ m

لتكن m نعوض في المعادلة أعلاه أنه:

نفرض أنه $y = e^{mx}$ و $y' = m e^{mx}$ و $y'' = m^2 e^{mx}$

بالتعويض:

$m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_2 e^{mx} = 0$

$(m^2 + a_1 m + a_2) e^{mx} = 0$

$e^{mx} \neq 0 \Leftarrow m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \quad (4)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أنّ حتى تكون e^{mx} حلّ للمعادلة يجب أن تحقق m وهي معادلة جبرية من المرتبة الثانية في m وتسمى معادلة خطية متجانسة ذات الأمثال الثابتة نميز الحالات الآتية:

$$W(e^{m_1x}, e^{m_2x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}$$

$$= m_2e^{(m_1+m_2)x} - m_1e^{(m_1+m_2)x} = (m_2-m_1)e^{(m_1+m_2)x}$$

1- $\Delta > 0$ هذا يعني m_2, m_1 مختلفان حقيقيان

$$a_1^2 - 4a_2 > 0$$

$$y(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

وهو الحل العام.

2- $\Delta < 0$

$$a_1^2 - 4a_2 < 0$$

هذا يعني مترافقان (مختلفان)

$$m_{1/2} = \alpha \mp i\beta$$

$$y = C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x} + C_2e^{-i\beta x})$$

حسب أويلر

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$
$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x$$

$$y = e^{\alpha x}((C_1+C_2)\cos\beta x + i(C_1-C_2)\sin\beta x)$$
$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3

$\Delta = 0$

$a_1^2 - 4a_2 = 0$

$m = m_1 = m_2$

$m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ ← تسمى معادلة مميزة

لحلة المعادلة 3 رمتبانية بالنسبة لـ y ومشتقاتها

$$Z = \frac{y'}{y} \quad , \quad \frac{y''}{y} = Z^2 + Z'$$

$$\frac{y''}{y} + a_1 \frac{y'}{y} + a_2 = 0$$

$$Z^2 + Z' + a_1 Z + a_2 = 0$$

$$Z^2 + \frac{dZ}{dx} + a_1 Z + a_2$$

$$\frac{dZ}{dx} = -(Z^2 + a_1 Z + a_2) = -(Z - m^2)$$

$$\frac{dZ}{(Z-m)^2} = -dx$$

$$\frac{1}{Z-m} = x + C$$

$$Z = \frac{1}{x+C} + m$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+C} + m\,dx$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$Ln(y) = Ln(x+c) + mx + Ln(c)$

$y = c_1(x+c)e^{mx}$

$y = (c_1x + cc_1)e^{mx}$

$y = (Ax+B)e^{mx}$

نتيجة: لحلّ المعادلة الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية ذات الأمثال الثابتة بالشكل

$y'' + a_1y' + a_2y = 0$

نكتب المعادلة المميزة $m^2 + a_1m + a_2 = 0$

① إذا كان $\Delta > 0$ يوجد جذران حقيقيان مختلفان m_1, m_2

$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$ ... (*)

② إذا كان $\Delta < 0$ يوجد جذران عقديان مترافقان

$m_{1,2} = \lambda \mp i\beta$

$y(x) = e^{\lambda x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

③ $\Delta = 0$ $m = m_1 = m_2$

$y(x) = (c_1x + c_2)e^{mx}$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة