كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية ١

المحاضرة : السابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المعادلات التفاضلية ذات المراتب العليا:

نسمي كلّ معادلة تحوي على المتحوّل X والتابع Y ومشتقات هذا التابع الأعلى مرتبة الأولى بمعادلة تفاضلية ذات مراتب عليا فإذا كانت رتبة أعلى مشتق فيها هي n

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

بعض أشكال هذه المعادلات:

① $y^{(n)} = f(x)$

وتحلّ بأخذ تكامل الطرفين n مرّة:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

مثال:

$$y''' = \sin x$$

$$y'' = -\cos x + C_1 \quad \text{بالمكاملة نجد}$$

$$y' = -\sin x + C_1 x + C_2 \quad \text{بالمكاملة نجد}$$

$$y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

كاملنا حتى وصلنا إلى y.

② $x = f(y^{(n)})$

$$y^{(n)} = T$$

$$x = f(T) \Rightarrow dx = f'(T)dT$$

ملاحظة:

$$\frac{dy''}{dx} = y''' \Rightarrow dy'' = y''' dx$$

$$d\,y^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$$

$$d\,y^{n-1} = y^n dx = t\,f'(t)\,dt$$

$$y^{(n-1)} = \int T f'(t)\,dT$$

$$d\,y^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx$$

ونأخذ x بدلالة T و y بدلالة T ويكون هو الحل الوسيطي.

مثال:

$$x = 3y''^2 + y'' + 1$$

$$y'' = t$$

$$x = 3t^2 + t + 1$$

$$dx = (6t+1)\,dt$$

$$dy' = y''\,dx = t(6t+1)\,dt = (6t^2+t)\,dt$$

$$y' = \int (6t^2+t)\,dT = 2t^3 + \frac{T^2}{2} + C_1$$

$$dy = y'\,dx = (2t^3 + t^2 + C_1)(6t+1)\,dT$$

$$= 12t^4 + 3t^3 + 6C_1 t + 2t^3 + \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow y = \frac{12t^5}{5} + \frac{5t^4}{4} + 31t^2 + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③. المعادلة خالية من التابع y:

$$F(x, y', y'', \dots, y^n)$$

لتخفيض مرتبتها نفرض $y' = z$ ⟸ و $y'' = z'$ ، $y^{(n)} = z^{n-1}$

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

مثال: $x^2 y'' = y'^2$

معادلة تفاضلية مرتبة ثانية

نفرض $y' = z$ ⟸

معادلة مرتبة أولى $x^2 z' = z^2 \Rightarrow$

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y'} = \frac{1}{x} + c_1$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{1 + c_1 x}{x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1 + c_1 x}$$

$$dy = \frac{x}{1 + c_1 x}\, dx$$

كي لمكاملتك نقسم قسمة إقليدية ونبدأ إجراء عملية القسمة والمكاملة نجد أن:

$$c_1 y = x - \frac{1}{c_1} \ln(c_1 x + 1) + c_2.$$

④. المعادلة خالية من التابع y ومشتقاته الأولى.

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نفرض أن $y^{(k)} = Z$ ⟸ $Z' = y^{(k+1)}$ ، $y^{(n)} = Z^{(n-k)}$

$$F(x, Z, Z', \dots, Z^{(n-k)}) = 0$$

مثال: $y''' = y''^2$

$$Z' = y''' \text{ ، } Z = y''$$

$$Z' = Z^2$$

$$\frac{dZ}{Z^2} = dx \Longrightarrow -\frac{1}{Z} = +x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{Z} = -x + C_1$$

$$y'' = \frac{1}{-x+C_1} \Rightarrow y' = \int \frac{dx}{-x+C_1} \Rightarrow y' = -\ln(x+C_1) - \ln(C_2)$$

$$y = -x\ln(C_2 - x + C_1) + x + C_1 \ln(-x+C_1) + C_3$$

(5) المعادلة خالية من المتحول المستقل x

لتخفيض مرتبط نفرض y وهو المتحول المستقل و $Z = y'$ وهو التابع $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

$$y'' = \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \boxed{Z\,Z'_y = y''}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(Z \cdot Z'y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= (Z'^2_y + Z\,Z''_y)Z$$

$$\boxed{y''' = Z\,Z'^2 y + Z^2 Z''y}$$

$$F(x, Z, Z'y, Z''y, \dots, Z^{(n-1)}y) = 0$$

مثال:

$$y'''\,y'^2 = y''^3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

y هو المتحول المستقل

$y' = z$

$y'' = z \cdot z'_y$ ، $y''' = z \cdot z'^2_y + z^2 \cdot z''_y$

$(z z'^2_y + z^2 z''_y) z^2 = z^3 \cdot z'^3_y$

$z'^2_y + z z''_y = z' y^3$

معادلة خالية من المتحول المستقل y

نفرض z المتحول المستقل $\Rightarrow$ $u = z'_y$ التابع

$z''_y = u u'_z$

$u^2 + z u u'_z = u^3$

$u' z + u = u^2$

$u' z + \frac{1}{z} u = \frac{1}{z} u^2$

معادلة برنولي نقسم على u^2

$u^{-2} \cdot u'_z + \frac{1}{z} u^{-1} = \frac{1}{z}$

نفرض $v = u^{-1}$

$v''_z = -u'_z \cdot u^{-2}$

$v'_z - \frac{1}{z} v = -\frac{1}{z}$

$\mu = \frac{1}{z}$

$v(z) = z \left(c + \int -\frac{1}{z} dz \right)$

$v = c_1 z + 1$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$U^{-1}(z) = V(z) = C_1 z + 1 \Rightarrow z'_y = \frac{1}{C_1 z + 1}$

$(C_1 z + 1)\,dz = dy$

$C_1 \frac{z^2}{2} + z = y + C_2$

$C_1 \frac{y'^2}{2} + y' = y + C_2$

$y = \frac{C_1}{2} y'^2 + y' - C_2$

$y' = P$

$$y = \frac{C_1}{2} P^2 + P - C_2 \quad \text{(1)}$$

$\frac{dy}{dx} = (C_1 P + 1)\frac{dP}{dx}$

$\frac{C_1 P + 1}{P}\,dP = dx$

$\left(C_1 + \frac{1}{P}\right) dP = dx$

$$x = C_1 P + \ln(P) + C_2 \quad \text{(2)}$$

(1)، (2) هما الحل بالشكل الوسيط.

(6) المعادلة متجانسة بالنسبة لـ y و مشتقاتها

$y \leftarrow \lambda y$

$y' \leftarrow \lambda y'$

$y^n \leftarrow \lambda y^{(n)}$

$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$

$\lambda = \frac{1}{y}$

$y' = y \cdot z \iff z = \frac{y'}{y}$

$y'' = y'z + yz'$

$\frac{y''}{y} = z^2 + z' \longrightarrow y'' = yz^2 + yz'$

$y''' = y'z^2 + 2yzz' + y'z' + yz''$

$\frac{y'''}{y} = z^3 + 3zz' + z''$

مثال:

$yy'' = y'^2$ (متجانسة بالنسبة لـ y وتقاطر)

نقسم على y^2

$\frac{y''}{y} = \frac{y'^2}{y^2}$

$z^2 + z' = z^2$

$\longrightarrow z' = 0 \longrightarrow z = c$

$\frac{y'}{y} = c_1 \longrightarrow \frac{dy}{y} = c_1 dx$

$\ln(y) = c_1 x + c_2$

$\frac{y}{c_2} = e^{c_1 x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(7) المعادلة المتجانسة بالنسبة لـ x.

$x \longleftarrow \lambda x$

$y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

$y \longleftarrow y$

$y' \longleftarrow \frac{1}{\lambda} y'$

$y'' \longleftarrow \frac{1}{\lambda^2} y''$

$y^{(n)} \longleftarrow \frac{1}{\lambda^n} y^{(n)}$

$F\left(\lambda x, y, \frac{y'}{\lambda}, \frac{y''}{\lambda^2}, \dots, \frac{y^{(n)}}{\lambda^n}\right)$

$\lambda^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

$\lambda = \frac{1}{x} \Longleftarrow$

$F(1, y, xy', x^2y'', \dots, x^n y^{(n)}) = 0$

لحلّ هذه المعادلة نفرض $x = e^t$

$t = \ln x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = y'_t \cdot \frac{1}{x}$

$\boxed{x y' = y'_t}$ ---- *

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x} y'_t\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2} y'_t + \frac{1}{x} \frac{dy'_t}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= -\frac{1}{x^2}y'_t + \frac{1}{x^2}y''_t$$

$$\boxed{x^2y'' = y''_t - y'_t} \quad ---*$$

$$x^3y''' = y'''_t - 3y''_t + 2y'_t$$ وبطريقة مشابهة

$$F(y, y'_t, y''_t, \dots) = 0$$

معادلة خالية من المتحول المستقل.

مثال:

$$xy'^2 + xyy'' = 2yy'$$

نضرب المعادلة بـ x

$$x^2y'^2 + x^2yy'' = 2xyy'$$

$$xy' = y'_t \quad \leftarrow x = e^t$$

$$x^2y'' = y''_t - y'_t$$

$$y'^2_t + yy''_t - 3yy'_t = 0$$

معادلة خالية من المتحول T ونكمل حل.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة