كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : السابعة/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

القسم: الرياضيات — المحاضرة: 7 عملي

السنة: الثانية

المادة: بنى جبرية 1

التمرين الأول:

$G_n = \{a + b\sqrt{n} \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}\}$

أثبت أن $(G_n, +)$ زمرة تبديلية.

الحل:

$G_n \neq \varphi$ لأنها تحوي على الأقل عنصر حيادي

① العملية + مغلقة على G_n

$\forall x, y \in G_n$

$x = a_1 + b_1\sqrt{n} \; ; \; a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$

$y = a_2 + b_2\sqrt{n} \; ; \; a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$

$x + y = (a + b_1\sqrt{n}) + (a_2 + b_2\sqrt{n}) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{n} \in G_n$

ومنه + مغلقة على G.

② + تجميعية على G_n لأن:

$\forall x, y, z \in G_n : (x + y) + z = x + (y + z)$

$x = a_1 + b_1\sqrt{n} \; , \; y = a_2 + b_2\sqrt{n} \; , \; z = a_3 + b_3\sqrt{n}$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$

$\ell_1 : (x + y) + z = [a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)\sqrt{n}] + a_3 + b_3\sqrt{n}$

$(a_1 + a_2) + a_3 + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt{n}$

$\ell_2 : x + (y + z)$

$a_1 + b_1\sqrt{n} + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{n}] = [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]\sqrt{n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

Z تجميعة على Gn ← $\rho_1 = \rho_2$ مهنة Z تجميعة على Zn

لنبرهن أنّ Gn تبديلية:

$\forall x, y \in G_n$

$x+y = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{n} = (a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{n} = y+x$

ومنه Gn زمرة تبديلية

وجود العنصر الحيادي:

$x+e = x$

$a_1+b_1\sqrt{n}+e = a_1+b_1\sqrt{n}$

$e = 0 \Rightarrow e = 0+0\sqrt{n}$

$e = 0+0\sqrt{n} \in G_n$

$x+e = x$.

$a_1+b_1\sqrt{n}+0+0\sqrt{n} = a_1+b_1\sqrt{n}$

$(a_1+0)+(b_1+0)\sqrt{n} = a_1+b_1\sqrt{n}$

$a_1+b_1\sqrt{n} = a_1+b_1\sqrt{n}$

$\Leftarrow$ هُوَ العنصر الحيادي $e = 0+0\sqrt{n}$

وجود العنصر النظير:

$x+x' = e \Rightarrow a_1+b_1\sqrt{n}+x_1 = 0+0\sqrt{n}$

$x' = (0-a_1)+(0-b_1)\sqrt{n}$

$x' = -a_1-b_1\sqrt{n}$

$a_1+b_1\sqrt{n}+(-a_1-b_1\sqrt{n}) = 0$

$(a_1-a_1)+(b_1-b_1)\sqrt{n} \Rightarrow 0+0\sqrt{n}$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نعم العنصر النظير هو $a_1 = b_1 \forall n$ ← بما أن Gn غير خالية ومغلقة وتجميعية وتبديلية ويوجد عنصر نظير فهي زمرة تبديلية.

التمرين الثاني:

$x * y = \frac{x \cdot y}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$(\mathbb{R}^+, *)$ زمرة تبديلية؟

① $\mathbb{R}^+ \neq \varphi$ واضح من التعريف.

② $*$ مغلقة على عناصر $\mathbb{R}^+$ لأن:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad x * y = \frac{x \cdot y}{2} \in \mathbb{R}^+$

③ $*$ تجميعية على عناصر $\mathbb{R}^+$ لأن

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$P_1 : (x * y) * z = \left(\frac{x \cdot y}{2}\right) * z = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$

$P_2 : x * (y * z) = x * \left(\frac{y \cdot z}{2}\right) = \frac{x \cdot y \cdot z}{4}$

$P_1 = P_2$ ← $*$ تجميعية

④ لنبرهن أن $*$ تبديلية:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$x * y = \frac{x y}{2} = \frac{y \cdot x}{2} = y * x$

⑤ وجود العنصر الحيادي:

$x * e = x \Rightarrow \frac{x e}{2} = x \Rightarrow \boxed{e = 2}$

$e = 2 \in \mathbb{R}^+$ ← $\boxed{e = 2}$ يوجد العنصر الحيادي وهو

$x * e = x \Rightarrow \frac{x \cdot 2}{2} = x \Rightarrow x = x$ محققة

← $e = 2$ العنصر الحيادي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x * x' = e \Rightarrow \frac{x \cdot x'}{2} = e \Rightarrow \frac{x \cdot x'}{2} = 2 \Rightarrow x' = \frac{4}{x}$

⑥ وجود العنصر النظير:

$x' = \frac{4}{x} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x * \frac{4}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x \cdot \frac{4}{2}}{x} = 2$

محققة $\boxed{2 = 2}$

بما أن الشروط (التجميعية، التبديلية، المغلقة، وجود العنصر الحيادي، وجود العنصر النظير، غير خالية) زمرة تبديلية $(\mathbb{R}^+, *)$.

التمرين الثالث (امتحان العملي السنة الماضية):

$G = \{(a,b),\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$.

$(a,b) T (c,d) = (ac, bc+d)$

اثبت أن (G, T) زمرة.

الحل:

G غير خالية

① T مغلقة على عناصر G:

$\forall (a,b), (c,d) \in G, a,b,c,d \in \mathbb{Q}$.

$(a,b) T (c,d) = (\underbrace{ac}_{\in \mathbb{Q}}, \underbrace{bc+d}_{\in \mathbb{Q}}) \in G$.

② T تجميعية على عناصر G

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in G$.

$[(a,b) T (c,d)] T (e,f) = (a,b) T [(c,d) T (e,f)]$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f_1 = [(ac, bc+d) \top (EF)] = [(ac)E ; (bc+d)E + f]$

$= [acE, bcE + dE + f]$

$f_2 : (a,b) \top [(c,d) \top (EF)]$

$(a,b) \top [(cE, dE+F)]$

$= (a(cE), bcE, dE+f) \Rightarrow f_1 = f_2$

ومنه $\top$ تجميعية على عناصر $(G, \top)$.

③ وجود العنصر الحيادي:

يوجد عنصر حيادي هو $(1,0) \in G$ لأن

$(a,b) \top (\rho, \rho') = (a,b)$

$(a\rho + b\rho + \rho') = (a,b)$

$a\rho = a \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow b\rho + \rho' = b \Rightarrow b + \rho' = b \Rightarrow$

$\boxed{\rho' = 0}$

العنصر الحيادي

يوجد عنصر حيادي هو $(1,0) \in G$

$x \top e = x$

$(a,b) \top (1,0) = (a,b)$

$(a, b+0) = (a,b)$

$(a,b) = (a,b)$.

$e \top x = x$

$(1,0) \top (a,b) = (a,b)$

$(a, 0+b) = (a,b)$

$(a,b) = (a,b) \Rightarrow b$. العنصر الحيادي هو $(1,0)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x' \top x = e \Rightarrow (x'_1, x'_2) \top (a,b) = e$

$(x'_1 a, x'_2 a + b) = (1,0)$

$x'_1 a = 1 \Rightarrow x'_1 = \frac{1}{a} \quad x'_2 a + b = 0 \Rightarrow x'_2 = -\frac{b}{a}$

يوجد عنصر نظير هو $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$

$x' \top x = e$

$(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \top (a,b) = (1,0)$

$(1, -b+b) = (1,0)$

$x \top x' = e \Rightarrow (a,b) \top (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (a \times \frac{1}{a} , b \times \frac{1}{a} - \frac{b}{a})$

$= (1,0)$

بما أن شروط الزمرة (هي غير خالية ومغلقة وتجميعية ويوجد عنصر حيادي ويوجد عنصر نظير) فهي زمرة.

التمرين الرابع:

لتكن $G = \{x, y, z\}$ ولنعرف عليها:

*	x	y	z
x	x	y	z
y	y	x	x
z	z	x	y

ادرس هل العملية * تجميعية:

$y * (y * z) = (y * y) * z$

$y * (y * z) = y * (x) = y$

$(y * y) * z = (x) * z = z$

$l_1 \neq l_2$

G ليست تجميعية

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z