كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : بنى جبرية١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٢٠٢٦

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

(2) برهان أنّ مقلوب نظير كل عنصر في G وحيد

البرهان:

ليكن x عنصر كيفي من G ولنفرض أنّ x' و x'' نظيران (مقلوبان) للعنصر x في G بالنسبة لـ $*$ عندئذٍ فإنّ

$x*x'=e \wedge x'*x=e$

$x*x''=e \wedge x''*x=e$

بفرض أنّ e هو العنصر الحيادي من الزمرة G بالنسبة لـ $*$

لدينا:

$x''=x''*e=x''*(x*x')=(x''*x)*x'=e*x'=x'$

أو بالشكل:

$x''=x'*e=x'*(x*x'')=(x'*x)*x''=e*x''=x''$

لأنّ $*$ تجميعية على عناصر G

$\Leftarrow$ مقلوبه (نظيره) أي عنصر x من G وحيد في G

(3)

$ab=ac \Rightarrow b=c$

لدينا $ab=ac$

نشكل من طرفي المساواة السابقة نظير العنصر a و a^{-1} من

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

اليسار قنبلة أيضاً

$a^{-1}xaxb = a^{-1}xaxc$

e e

$exb = e*c \iff b = c$

وهذه الخاصة تدعى خاصة الاختزال في G من يسار الزمرة G وبنفس الطريقة نبرهن أيضاً:

$b*a = c*a \Rightarrow b = c$

(4)

$\forall a \in G : a*a^{-1} = e \wedge a^{-1}*a = e \Rightarrow$

$(a^{-1})^{-1} = a$ هو نظير العنصر a^{-1} أيضاً

(5) برهان أيضاً

$(a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

لدينا $a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n * a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

$= a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1} =$

e

$a_1 * a_2 * a_2^{-1} * a_1^{-1} = a_1 * e * a_1^{-1} = a_1 * a_1^{-1} = e$

وبنفس الطريقة أيضاً

$a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1} * a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n$

$= a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n =$

e

$= a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * a_{n-1} * a_n = a_n^{-1} * a_n = e$

وهو العنصر المحايد في G بالنسبة لـ $*$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(a_1 * a_2 * \dots * a_{n-1} * a_n)^{-1} = a_n^{-1} * a_{n-1}^{-1} * \dots * a_2^{-1} * a_1^{-1}$

⑥

كمالة خاصة فإنه:

$(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

لدينا $a * b * b^{-1} * a^{-1} = a * a^{-1} = e$

$b^{-1} * a^{-1} * a * b = b^{-1} * e * b = b * b^{-1} = e$

وبالتالي:

$(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

⑦ برهان أنه المعادلة $a*x=b$ حل وحيد في G

وأيضاً $x*a=b$ حيث a, b من G

لدينا $a * x = b$

نضرب طرفي المعادلة السابقة من اليسار بنظير العنصر a وهو a^{-1} بالتالي:

$a^{-1} * a * x = a^{-1} * b$

e

$x = a^{-1} * b$ وهو حل المعادلة في G حيث $x \in G$ وهذا الحل وحيد لأنه بفرض أن x' و x'' حلان للمعادلة $a*x=b$ في G فإنه:

x' حل المعادلة $\Leftarrow a*x=b \Leftarrow a*x'=b$

و x' حل للمعادلة $\Leftarrow a*x=b \Leftarrow a*x''=b$

$a*x' = a*x'' \longrightarrow x'' = x'$

وحل المعادلة $a*x=b$ وحيد في G وبنفس الطريقة نبرهن أن المعادلة $x*a=b$ حل في G وهو وحيد.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما وكان e عنصرها الحيادي فإن $e=e^{-1}$ لأن

من جهة أولى $\rightarrow$ (1) $e^{-1}*e=e*e^{-1}=e^{-1}$ لأن e حيادي

ومن جهة ثانية فإن

$e^{-1}*e=e*e^{-1}=e$ ... (2) وفق تعريف نظير العنصر

من (1) و (2) نجد أن $e=e^{-1}$.

أي أن مقلوب نظير العنصر الحيادي في الزمرة G هو نفسه.

ملاحظة هامة:

إذا كانت $(G,*)$ زمرة ما و e عنصرها الحيادي عندئذٍ

$e*e*\ldots\ldots*e=e^n=e$

n مرة

الزمر المنتهية والزمر غير المنتهية:

نقول عن الزمرة $(G,*)$ واختصاراً " G أنها زمرة منتهية إذا وفقط إذا كانت G تحوي عدد منتهي من العناصر مختلفة عن بعضها البعض وفي هذه الحالة ندعو عدد عناصر G رتبة الزمرة G ونرمز لها بالرمز $O(G)$

أما في حال كانت G تحوي عدد غير منتهي من العناصر المختلفة عن بعضها البعض عندئذٍ نقول أن هذه الزمرة غير منتهية ونقول أن رتبتها غير منتهية أي نكتب $O(G)=\infty$

عدد عناصر الزمرة

أما في حال كانت الزمرة G منتهية وعدد عناصرها المختلف

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عنه بوضط البوضه وهو n حيث $n<\infty$ عندئذٍ
$O(G)=|G|=n<\infty$
عدد عناصر G.

مثال: إن $G=\{1,-1,i,-i\}$ هي زمرة بالنسبة لعملية الضرب * أي $(G,*)$ زمرة إبدالية G زمرة منتهية لأنه عدد عناصرها المختلفة عنه بوضط البوضه هو $n=4$
$O|G|=|G|=4<\infty$

أما الزمرة $(Z,+)$ هي زمرة غير منتهية لأن Z مجموعة غير منتهية فيط عدد غير منتهي من العناصر المختلفة عنه بوضط البوضه $O(Z)=\infty$

جدول كايلي للعملية الجبرية الثنائية:
إذا كانت $G\neq\phi$ مجموعة منتهية معرفة عليط عملية جبرية * عندئذٍ يمكن تمثيل العملية * المعرفة على المجموعة G بجدول يدعى جدول كايلي للعملية الجبرية * وهو يتضمن ناتج تكيل أي عنصرين منه بأي ترتيب كانا وفق * ومن خلال هذا الجدول يمكن دراسة خواص هذه العملية ومعرفة فيما إذا كانت $(G,*)$ زمرة أولا.

مثال:
إذا كانت $G=\{a,b,c\}$ عندئذٍ فإن الجدول التالي يعرف العملية * على G بالشكل:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

والمطلوب وفقاً للجدول ادرس فيما إذا كانت $(G,*)$ زمرة.

P). نلاحظ أنّ $G \neq \varphi$

ب). العملية $*$ مغلقة لأنّ وفقاً للجدول فإنّ:

$\forall x,y \in G \Rightarrow x*y \in G$

ج). $*$ تجميعية على عناصر G لأنّ:

$(a*b)*b = a*(a*b)$

$(a*a)*b = a*b = b$

$a*(a*b) = a*b = b$

$(a*b)*c = b*c = a$ } $\Rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$

$a*(b*c) = a*a = a$ }

وبأيّ شكل نأخذ عناصر من G وفق الجدول تحقق شرط التجميعية وهو

$\forall x,y,z \in G : (x*y)*z = x*(y*z)$

د). وجود العنصر الحيادي $e = a$ هو العنصر الحيادي في G بالنسبة لـ $*$ لأنّه من جهة أولى فإنّه

$e = a \in G$ ومن جهة أخرى فإنّه:

$\forall x \in G \Rightarrow x*e = x \; , \; e*x = x \; ; \; x = a,b,c$

و). وجود العنصر النظير:

العنصر	a	b	c
نظيره	a	c	b

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

لكل عنصر x في G نظير بالنسبة للعملية $*$ يحقق:

$\forall x \in G \; \exists x' \in G : x * x' = e \;,\; x' * x = e = a$

وبالتالي مما سبق نجد أن: $(G, *)$ زمرة تبديلية

لأنه

$a * a = a$

$a * b = b = b * a$

$a * c = c = c * a$

$b * c = a = c * b$

نلاحظ أن الشرط التالي محقق

$\forall x, y \in G : x * y = y * x$

وأيضاً يمكن معرفة أن العملية $*$ تبديلية من الجدول

إذا كانت العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية.

بعض الملاحظات المتعلقة بجدول كايلي:

1. يكون العنصر x من الزمرة G حيادياً إذا ورد في الصف المقابل له نفس عناصر الصف الأول وبنفس الترتيب وفي العمود المقابل له نفس عناصر العمود الأول وبنفس الترتيب.
2. تكون العملية الثنائية تبديلية إذا كانت العناصر المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي في الجدول متساوية.
3. يكون للعنصر x نظير معكوس إذا ورد العنصر الحيادي في كل من الصف المقابل له في الجدول وفي العمود المقابل له في الجدول.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تمرين: شكل جدول كايلي لعملية الضرب المعرفة على المجموعة $G=\{1,-1,i,-i\}$ وبين فيما إذا كانت $(G,\cdot)$ زمرة تبديلية.

تمرين: شكل جدول كايلي لـ $(\overline{Z}_4,\oplus)$ ، $(\overline{Z}_3,\otimes)$ ، $(\overline{Z}_4,\otimes)$ ، $(\overline{Z}_5,\otimes)$ وماذا تستنتج؟

ثم لـ $(\overline{Z}_3^{\times},\otimes)$ و $(\overline{Z}_4^{*},\otimes)$ و $(\overline{Z}_5^{*},\otimes)$ ، $(\overline{Z}_6^{*},\otimes)$

ماذا تستنتج.

تحاول حل التمارين في العملي.

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z