كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الرابعة**

المادة : ميكانيك الكم٢

المحاضرة : ٨+٩ /نظري/

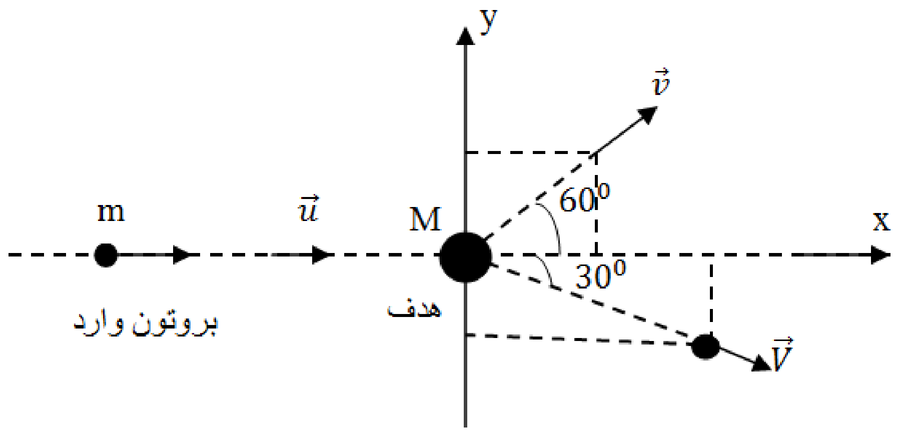
{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المحاضرة الثامنة والتاسعة لمقرر ميكانيك الكم (2) لطلاب السنة الرابعة فيزياء – د. سمر عمران

تطبيق1: يُلاحظ في صورة مأخوذة في حجرة سحاب أن بروتوناً يعاني اصطداماً مرناً، فينحرف عن مساره بفعل هذا الاصطدام زاوية مقدارها 60^0، ويصنع الجسيم المصدوم مع اتجاه البروتون الوارد زاوية مقدارها 30^0، والمطلوب: ماهي كتلة الجسيم المصدوم وما هي ماهيتهُ؟

الحل: بفرض أنَّ سرعة البروتون الوارد قبل التصادم $\vec{u}$ وسرعته بعد التصادم $\vec{v}$ وسرعة الهدف بعد التشتت $\vec{V}$ (بعد اصطدام البروتون به)، وبفرض كتلة البروتون m وكتلة الهدف M.



بما أنَّ التصادم مرن فإنَّ مبدأ انحفاظ الاندفاع ومبدأ انحفاظ الطاقة محققان وبالتالي نستطيع أن نكتب:

$$0 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

طاقة الجملة الحركية بعد التصادم = طاقة الجملة الحركية قبل التصادم

نضرب طرفي العلاقة بـ $\frac{2}{m}$، نجد:

$$u^2 = v^2 + \frac{M}{m}V^2 \qquad (1)$$

نكتب حسب مبدأ انحفاظ الاندفاع:

$$0 + m\vec{u} = m\vec{v} + M\vec{V}$$

نسقط هذه العلاقة المتجهة على جملة محاور إحداثية متعامدة xoy فيها محور السينات منطبق على اتجاه الورود.

1– بالإسقاط على محور السينات ox نجد:

$$mu = mv\cos(60^0) + MV\cos(30^0) = \frac{mv}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}MV$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{v}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2m}MV \qquad (2)$$

2- بالإسقاط على محور العينات oy نجد:

$$0 = mv\sin(60^0) - MV\sin(30^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}mv - \frac{MV}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}mv - \frac{MV}{2} \qquad (3)$$

من العلاقة (3):

$$\frac{\sqrt{3}}{2}mv = \frac{MV}{2} \Rightarrow v = \frac{MV}{\sqrt{3}m}$$

نعوض في العلاقة (2):

$$u = \frac{MV}{2\sqrt{3}m} + \frac{\sqrt{3}}{2m}MV = \frac{MV}{2\sqrt{3}m}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2m}MV = \frac{\sqrt{3}}{6m}MV + \frac{\sqrt{3}}{2m}MV$$

$$= \frac{\sqrt{3}MV + 3\sqrt{3}MV}{6m} = \frac{4\sqrt{3}MV}{6m} = \frac{2\sqrt{3}MV}{3m}$$

نعوض في العلاقة (1) نجد:

$$\left(\frac{2\sqrt{3}MV}{3m}\right)^2 = \left(\frac{MV}{\sqrt{3}m}\right)^2 + \frac{M}{m}V^2$$

$$\Rightarrow \frac{12M^2V^2}{9m^2} = \frac{M^2V^2}{3m^2} + \frac{M}{m}V^2 \Rightarrow \frac{4M^2}{3m^2} = \frac{M^2}{3m^2} + \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{4M^2}{3m^2} - \frac{M^2}{3m^2} = \frac{M}{m} \Rightarrow \frac{M^2}{m^2} = \frac{M}{m} \Rightarrow \frac{M}{m} = 1 \Rightarrow M = m$$

أي الهدف هو بروتون.

تطبيق2: إذا كان مسار جسيمات إلفا الناتج عن استطارتها (تبعثرها) بتفاعلها مع نواة ذرة ما عبارة عن قطع زائد، تُعطى معادلته في الإحداثيات القطبية بالعلاقة التالية:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\sin\varphi + \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi - 1) \qquad (1)$$

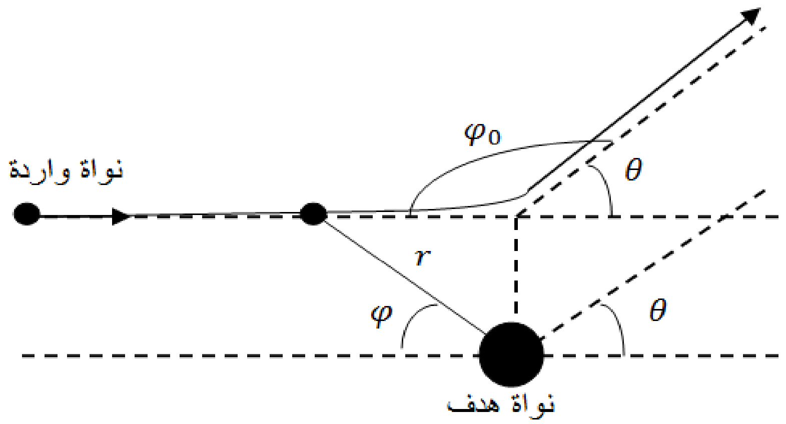
المطلوب: استخدم هذه العلاقة لتبيان أنَّ العلاقة التي تربط زاوية التبعثر مع بارامتر الصدم هي:

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{D}$$

حيث شحنة جسيم إلفا= +2e ، وشحنة النواة الهدف= +Ze

الطاقة الحركية T: $, D = \frac{2Ke^2Z}{T} = 9\times10^9\frac{2e^2Z}{T}$, إلفا جسيم إلفا $= +2e$, شحنة النواة الهدف $= +Ze$

الحل:



عندما $r \to \infty$ فإنَّ قيمة φ محددة ولتكن φ_0، وتكون زاوية التبعثر في هذه الحالة

$$\theta = \pi - \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi - \theta$$

نبدّل في العلاقة (1):

$$\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{1}{b}\sin\varphi_0 + \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi_0 - 1)$$

$$-\frac{1}{b}\sin\varphi_0 = \frac{D}{2b^2}(\cos\varphi_0 - 1) \Rightarrow -\sin\varphi_0 = \frac{D}{2b}(\cos\varphi_0 - 1)$$

$$-\sin(\pi-\theta) = \frac{D}{2b}(\cos(\pi-\theta) - 1)$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\ ,\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\sin(\theta)=\frac{D}{2b}(-\cos(\theta)-1)\Rightarrow \sin(\theta)=\frac{D}{2b}(\cos(\theta)+1)$$

$$\sin(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\ ,\cos(\theta)=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{D}{2b}\left(2-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{D}{b}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2}=\frac{D}{b}\cos\frac{\theta}{2}\Rightarrow \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2b}{D}\Rightarrow \cot\frac{\theta}{2}=\frac{2b}{D}$$

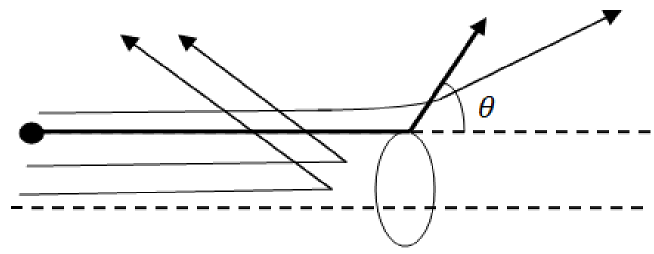
تطبيق3: استخدم جايجير ومارسيدن في إحدى تجارب الاستطارة جسيمات إلفا (نوى الهيليوم) بطاقة حركية: $T=7.7MeV$ واستخدما رقائق من الذهب سمكها $t=3\times10^{-7}m$، والمطلوب:

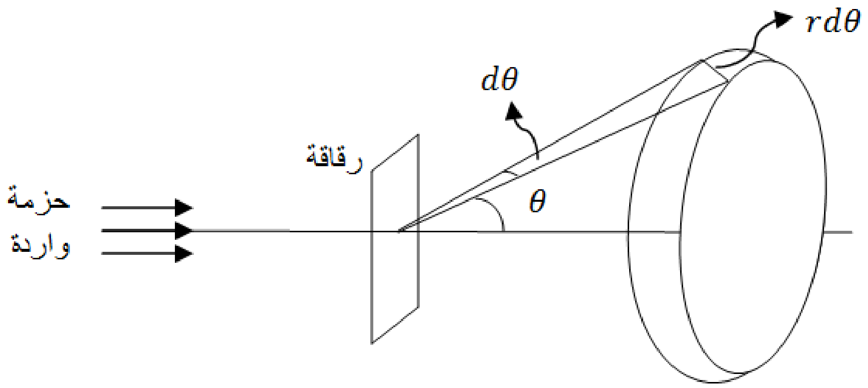
1- بيّن أنّهُ يمكن استخدام الميكانيك الكلاسيكي في دراسة حركة جسيمات إلفا؟

2- احسب مسافة أدنى اقتراب لصدمة مباشرة (D=?)؟

3- احسب بارامتر الصدم وكذلك المقطع العرضي للتبعثر عند $\theta=45^0$؟

4- احسب نسبة الجسيمات التي تنحرف بزاوية مساوية 45^0 ؟





$$D = \frac{2Ke^2Z}{T} = 9 \times 10^9 \frac{2e^2Z}{T}, 1MeV = 10^6 eV, 1eV = 1.6 \times 10^{-19} J$$

$$M_\alpha = 6.6587 \times 10^{-27} kg, M_{\alpha 0} = 6.645 \times 10^{-27} kg, Z\left(\text{للذهب}\right) = 79$$

الحل:

1- يمكن استخدام الميكانيك الكلاسيكي إذا كانت سرعة الجسيمات صغيرة مقارنة مع سرعة الضوء ($c \gg v$).

$$(\text{طاقة حركية}) T = 7.7 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.23 \times 10^{-12} J$$

$$(\text{تغير الكتلة}) \Delta m = \frac{T}{c^2} = \frac{1.23 \times 10^{-12}}{(3 \times 10^8)^2} = 1.37 \times 10^{-29} Kg$$

$$M_\alpha = \frac{M_{\alpha 0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left(\frac{M_\alpha}{M_{\alpha 0}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \left(\frac{M_\alpha}{M_{\alpha 0}}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{6.6587 \times 10^{-27} kg}{6.645 \times 10^{-27} kg}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v}{c} = 0.063 \Rightarrow v = 0.063c$$

وهذه السرعة صغيرة جداً مقارنة مع سرعة الضوء وبالتالي يمكن استخدام الميكانيك الكلاسيكي في دراسة حركة جسيمات إلفا.

2-

$$D = \frac{2Ke^2Z}{T} = \frac{2 \times 9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 79}{1.23 \times 10^{-12}} = 2.96 \times 10^{-14} m$$

-3

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \Rightarrow b = \frac{D}{2}\cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(2.96 \times 10^{-14})\cot\left(\frac{45}{2}\right) = 3.57 \times 10^{-14} m$$

وهو بارامتر الصدم.

$$\sigma = \pi b^2 = 3.14 \times (3.57 \times 10^{-14})^2 = 4 \times 10^{-27} m^2$$

-4

عدد الذرات الموجودة في وحدة الحجم n تساوي:

$$n = \frac{\text{عدد الذرات الكلي}}{\text{الحجم الكلي}} = \frac{\text{عدد الذرات}}{\text{المول}} . \frac{\text{المول}}{\text{الحجم}} = \text{عدد أفوغادرو} . \frac{\text{الكتلة}}{\text{الوزن الجزيئي}} . \frac{1}{\text{الحجم}} =$$

$$= \text{عدد أفوغادرو} . \frac{\text{الكثافة}}{\text{الوزن الجزيئي}} = \frac{N_a \times \rho}{M_a}$$

$$\rho\left(\text{للذهب } Au\right) = 19.3\, g/cm^3 \quad , M_a(Au) = 197\, g/mol$$

$$n = \frac{N_a \times \rho}{M_a} = \frac{6.023 \times 10^{23} (mol)^{-1} \times 19.3 \times 10^3}{197 \times 10^{-3}} = 5.9 \times 10^{28}\, atoms/m^3$$

$$f = n\sigma t = 5.9 \times 10^{28} \times 4 \times 10^{-27} \times 3 \times 10^{-7} = 7.08 \times 10^{-5} = 0.007\%$$

وهي النسبة التي تنحرف من الجسيمات.

تطبيق4: يُلاحظ عند قذف الليثيوم بالديوترونات التي طاقتها 10MeV أنَّ النترونات الناتجة من التفاعل تصدر صانعة زاوية مقدارها 90^0 مع اتجاه ورود الديوترونات، والمطلوب:

1- احسب طاقة هذه النترونات؟

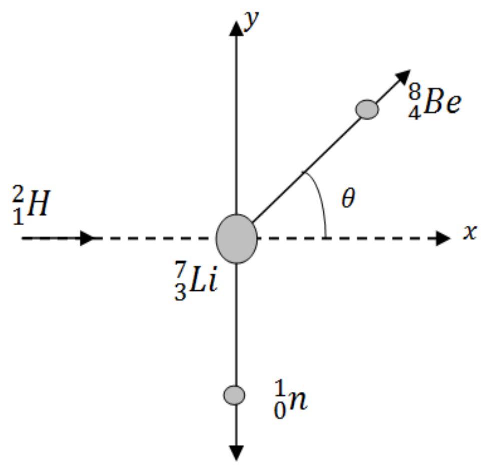
2- الطاقة التي ترتد بها ذرة البريليوم التي تنتج من التفاعل؟

3- احسب الاتجاه الذي ترتد به ذرة البريليوم؟

تُعطى كتل الذرات المشتركة في التفاعل بوحدة الكتل الذرية كما يلي:

$$({}_{0}^{1}n)\text{كتلة النترون} = 1.00893\ ,\ ({}_{3}^{7}Li)\text{كتلة ذرة الليثيوم} = 7.01784$$

$$({}_{1}^{2}H)\text{كتلة ذرة الديوترون} = 2.01472,\ ({}_{4}^{8}Be)\text{كتلة ذرة البريليوم} = 8.00776$$



الحل:

$${}_{3}^{7}Li + {}_{1}^{2}H \rightarrow {}_{4}^{8}Be + {}_{0}^{1}n$$

$$Q = \text{كتل الدخل} - \text{كتل الخرج} = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)$$
$$= (7.01784 + 2.01472) - (8.00776 + 1.00893) = 0.01587amu$$

من جهة أخرى نكتب:

$$Q = E_{k_3} + E_{k_4} - E_{k_1} - E_{k_2} \Rightarrow E_{k_3} + E_{k_4} = Q + E_{k_2}$$
$$= (0.01587 \times 931MeV) + 10MeV = 24.77MeV$$

$$\Rightarrow E_{k_3} + E_{k_4} = 24.77MeV \qquad (1)$$

من جهة أخرى وحسب مبدأ انحفاظ الاندفاع نكتب:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4$$

$$\text{(الهدف ساكن)}\ \vec{P}_1 = 0$$

نسقط هذه العلاقة على جملة محاور إحداثية متعامدة فيها محور السينات منطبق على اتجاه الورود:

بالإسقاط على محور السينات: $P_2 = P_3\, cos\, \theta$ (2)

بالإسقاط على محور العينات: $0 = P_3\, sin\, \theta - P_4$ (3)

$$P = mv\ , E_k = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \Rightarrow P = \sqrt{2mE_k}$$

نكتب (2) و (3) بدلالة الطاقات الحركية:

$$\sqrt{2m_2 E_{k_2}} = \sqrt{2m_3 E_{k_3}}\, cos\, \theta \qquad (4)$$

$$\sqrt{2m_4 E_{k_4}} = \sqrt{2m_3 E_{k_3}}\, sin\, \theta \qquad (5)$$

بالتربيع والجمع نجد:

$$2m_2 E_{k_2} + 2m_4 E_{k_4} = 2m_3 E_{k_3} \qquad (6)$$

بحلّ (1) و (6) نجد، حيث من العلاقة (6):

$$2(2.01472 \times 931 MeV)10 MeV + 2(1.00893 \times 931) E_{k_4} = 2(8.00776 \times 931) E_{k_3}$$

$$37514.0864 + 1878.62766 E_{k_4} = 14910.45098 E_{k_3}$$

نعوض من العلاقة (1): $E_{\mathrm{k}_3} = 24.77 MeV - E_{\mathrm{k}_4}$ في العلاقة الأخيرة نجد:

$$37514.0864 + 1878.62766 E_{k_4} = 14910.45098 \left(24.77 MeV - E_{\mathrm{k}_4}\right)$$

$$16789.07 E_{k_4} = 369331.8465 - 37514.0864 = 331817.7601$$

$$E_{k_4} = \frac{331817.7601}{16789.07} = 19.76 MeV$$

$$\Rightarrow E_{k_4} = 19.76 MeV \ \Rightarrow\ E_{k_3} = 5.01 MeV$$

إذاً ذرة البريليوم ترتد بطاقة حركية مقدارها $5.01 MeV$، أمّا اتجاه الارتداد فنجده بتقسيم العلاقة (5) على (4):

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{2m_4 E_{k_4}}{2m_2 E_{k_2}}} = 0.9947 \Rightarrow\ \theta = 44^0$$

تطبيق5: تتبعثر أشعة سينية طول موجتها $0.8560A^0$ على هدف من الفحم، والمطلوب:

1- احسب التغير الموجي الطارئ على طول موجة الأشعة المبعثرة بزاوية 90^0 ؟

2- أوجد طاقة الالكترون المرتد والاتجاه الذي يخرج فيه؟

حيث: $h = 6.625 \times 10^{-34} J.s \;,\;\; m_0 = 9.1 \times 10^{-31} kg$

الحل:

1- نكتب قانون التغير الطارئ على طول موجة الفوتون لدى تبعثره على الالكترون بزاوية α:

$$\grave{\lambda} - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\alpha)$$

من أجل $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\grave{\lambda} - \lambda = \frac{h}{m_0 c} \Rightarrow \grave{\lambda} - \lambda = \frac{6.625 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} = 0.242 \times 10^{-11} m$$
$$= 0.242 \times 10^{-11} \times 10^{+10} = 0.0242A^0$$

2- لتكن E طاقة الالكترون المرتد فهي تساوي الفرق بين طاقة الفوتون الوارد $\frac{hc}{\lambda}$ وطاقة الفوتون بعد تبعثره $\frac{hc}{\grave{\lambda}}$:

$$E = h.c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\grave{\lambda}}\right) \qquad (*)$$

$$\lambda = 0.8560A^0 = 0.8560 \times 10^{-10} m$$

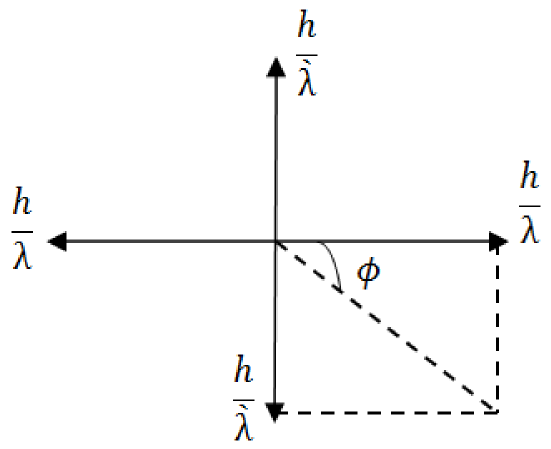
$$\grave{\lambda} = \lambda + 0.0242A^0 = 0.8560A^0 + 0.0242A^0 = 0.8802A^0 = 0.8802 \times 10^{-10} m$$

نعوض في (*) نجد:

$$E = 6.625 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{0.8560} - \frac{1}{0.8802}\right) = 6.3836 \times 10^{-27} Joul$$

أمّا الاتجاه الذي يخرج فيه الالكترون فنعينه اعتماداً على مبدأ انحفاظ الاندفاع الخطي.

اندفاع الفوتون الوارد هو $\frac{h}{\lambda}$ واندفاع الفوتون المتبعثر بزاوية مقدارها 90^0 هو $\frac{h}{\grave{\lambda}}$، ولكي يبقى مبدأ انحفاظ الاندفاع صحيحاً يجب أن تكون مركبة اندفاع الالكترون المرتد باتجاه الفوتون الوارد مساوية $\frac{h}{\lambda}$، ويجب أن تكون مركبة اندفاع الالكترون المرتد بالاتجاه العمودي معاكسة لـ $\frac{h}{\grave{\lambda}}$ ومساوية لهُ، كما يبين الشكل التالي:



بفرض ϕ زاوية انطلاق الالكترون المرتد، وبالتالي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{h}{\grave{\lambda}}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\grave{\lambda}} = \frac{0.8560}{0.8802} = 0.9725 \Rightarrow \phi = 44^0$$

تطبيق14: تتبعثر حزمة من الجسيمات تبعثراً مرناً بزاوية θ بواسطة كرة صلبة نصف قطرها R والمطلوب:

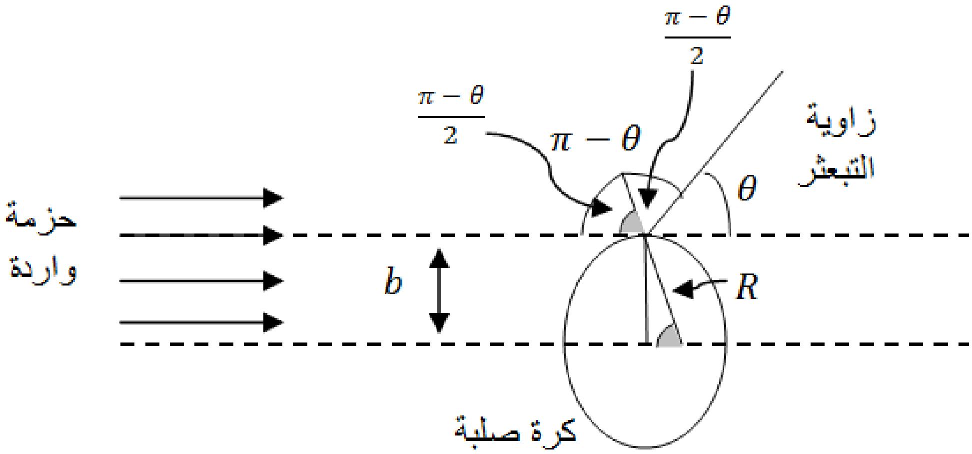
1- ارسم مخطط التبعثر؟

2- أوجد علاقة بارامتر الصدم بزاوية التبعثر؟

3- أوجد مقطع التشتت المرن، واحسب قيمته من أجل $R = 4cm$؟

الحل:

1-



2-

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}=\frac{b}{R}\Rightarrow\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{b}{R}\Rightarrow b=R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

3- نعلم أنَّ:

$$\sigma(\theta)=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$\frac{db}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow\sigma(\theta)=\frac{R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta}\frac{R}{2}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{R^2}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow R=4cm\Rightarrow\sigma(\theta)=\frac{1}{4}|4|^2=4cm^2$$