كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : ميكانيك الكم ١

المحاضرة : الثامنة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

لكن بالتواتر الإشعاعي

$$\omega_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} = (n'l') - (nl)$$ و $$-\frac{E_{nl}}{\hbar} = (nl)$$

وجدنا سابقاً

$$\frac{E_n}{\hbar} = \frac{me^4}{2\hbar^3}\frac{Z^2}{n^2} = \frac{RZ^2}{n^2} \quad ; \quad R = \frac{me^4}{2\hbar^3}$$

وبالتالي

$$\omega_{nn'} = RZ^2\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

من أجل $Z=1$ (هيدروجين) نحصل على سلسلة ليمان المقابلة للانتقال إلى السوية الأساسية $n'=1$ أي $1S$ والتي تواترها

lyman

$$\omega_L = (1S) - (nP) = R\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots$$

أما سلسلة بالمر المؤلفة للانتقال إلى السوية $n'=2$ من سويات أعلى $n>2$ فنجد ثلاث تواترات فقط بعد ملاحظة أن l يمكن أن تزداد أو تنقص واحداً

$$\omega'_B = (2S) - (nP)$$

Balmer $$\omega''_B = (2P) - (nS)$$

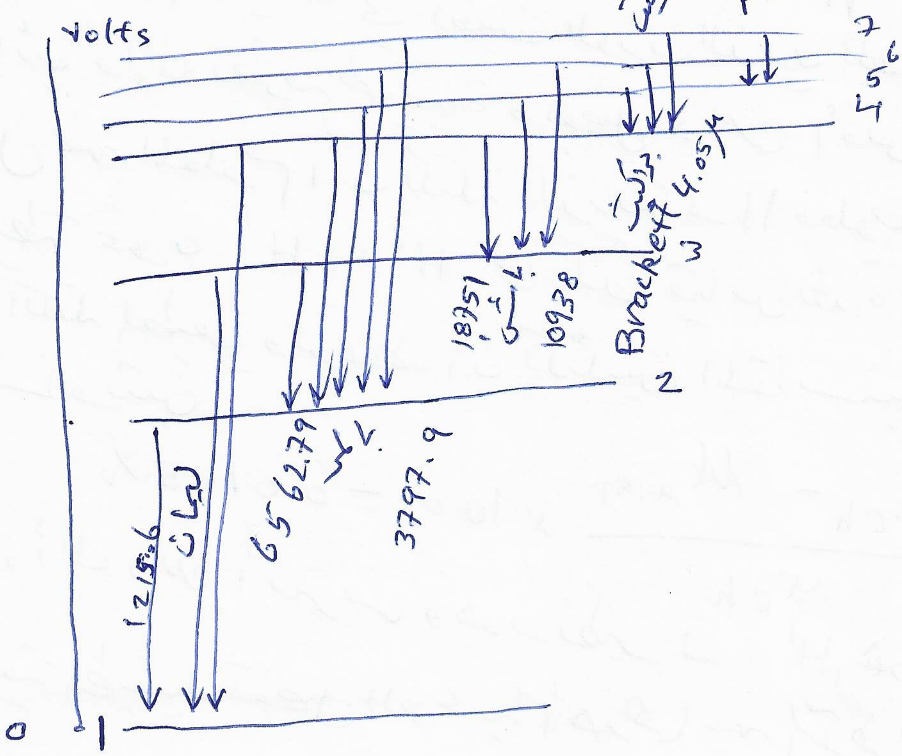
$$\omega'''_B = (2P) - (nd)$$

كل السويات التي لها العدد n نفسه ستكون منطبقة بالنسبة لكل l كما رأينا ولذلك فإن الخطوط الطيفية الثلاثة المقابلة ستكون متحدة في خط واحد هو الخط الطيفي المقابل للتواتر

$$\omega_B = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

وبشكل مماثل للانتقال إلى السوية الثالثة $n'=3$ فسيكون $n>3$ ونحصل على التواتر

paschen $$\omega_p = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$



وتكون السلاسل على الشكل

Lyman $\frac{1}{\lambda_L} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 2, 3, 4, \ldots$

Balmer $\frac{1}{\lambda_B} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 3, 4, \ldots$

Paschen $\frac{1}{\lambda_p} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 4, 5, 6 \ldots$

Brackett $\frac{1}{\lambda_B} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 5, 6, 7 \ldots$

Pfund $\frac{1}{\lambda_{pf}} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$ $n = 6, 7, \ldots$

إن حركة جسمين تؤول إلى حركة جسم واحد واقع في الحقل الآخر على أن تأخذ بدلاً من الكتلة M الكتلة المختزلة

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} = m\left(1 - \frac{m}{M}\right)$$

ويصبح ثابت ريدبرغ

$$R_M = \frac{\mu e^4}{2\hbar^3} = R\left(1 - \frac{m}{M}\right)$$

ويصبح (nl)

$$(nl) = \frac{Z^2 R}{n^2}\left(1 - \frac{m}{M}\right)$$

تفيدنا هذه التطبيقات في تعيين الوزن الذري للعناصر ليس فقط بالطرق الكيميائية وإنما بطرق طيفية وبفضل ذلك أمكن إثبات وجود الهيدروجين الثقيل من المعلوم أن الكتلة الذرية لـ H معلومة بالنسبة للاكسجين من خليط يحوي H^1 ، H^2 ، وأمكن قياس هذه الكتلة بواسطة مقياس الكتلة الطيفي ولوحظ أن الكتلتين المقاستين بالطريقتين غير متساويتين

$$\frac{M_{ch} - M_{M.sp}}{M_{ch}} \times 100 = 0.0145\%$$

واستناداً إلى ذلك أُفترض وجود نظير لـ H^1_1 هو الديتريوم $D = H^2_1$ لأن الطريقة الطيفية تفصل النوعية أحدهما عن الآخر لاختلافهما في الكتلة

يتحد الديتريوم مع الاوكسجين ليكون الماء الثقيل الموجود بكمية قليلة في الماء الطبيعي والذي عكس كشفه بالطرق الطيفية والتي أظهرت وجوده بالإضافة إلى خطوط بالمر الموافقة

$$\omega_B^H = R\left(1-\frac{1}{1840}\right)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

يوجد خطوط طيفية أخرى $\omega_B^D = R\left(1-\frac{1}{3680}\right)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$

إن الاختلاف في الكتلة بين الهيدروجين والديتريوم ليتسبب اختلافا في الخواص الفيزيائية والكيميائية لنوعي الماء المقابلين لكل منهما :

فمثلاً درجة غليان D_2O هي $101.4\,^{\circ}C$ تحت ضغط جوي واحد ويتجمد في الدرجة $3.81\,^{\circ}C$ وهو لزج جداً وأقل إذابة للملح وهو مبطئ مثالي للنترونات السريعة ويستخدم للحصول على الديتريوم D_2O

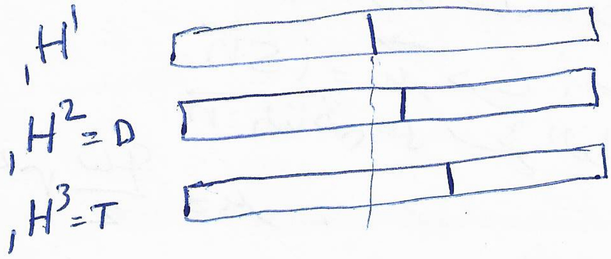
وهناك نظير آخر الترتيوم ويحوي نواته على بروتون واحد ونترونين وعند اتحاده مع الاوكسجين نحصل على T_2O وهو قليل جداً نسبته 10^{-18} في الماء ونسبته بالنسبة للديتريوم $\frac{1}{6800}$ وهو أمل لإيجاد الطاقة عن طريق تحقيق تفاعل الالتحام وتفاعله مع الديتريوم ليعطي ذرة هليوم ونترون وطاقة كبيرة

$$D+T = 2He_2^4 + n + 17\ MeV$$

ولا يحصل هذا التفاعل إلا بدرجة حرارة عالية أكبر من 10^8 من أجل التغلب على الحاجز الكولوني للنواتين وجعلهما تلتحمان وهذا يتحقق عن طريق القنبلة الذرية لتحقيق الالتحام وإن الخطوط الطيفية للترتيوم المقابلة لسلسلة بالمر منزاحة إلى اليمين بسبب الكتلة وأتواترها هو

$$\omega_B^T = R\left(1-\frac{1}{5520}\right)\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

ويظهر انزياح الطيف لكل منهم على الشكل



الحركة في حقل مغناطيسي - سبين الإلكترون.

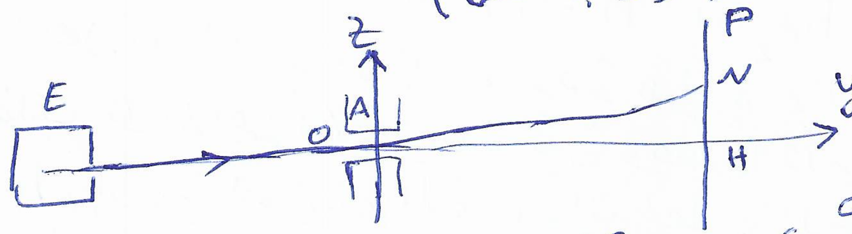
إن الرباعية $\{ |n, l, m_l\rangle$ تصف حالة الجملة حيث يمثل n العدد الكمي الرئيسي، l العدد الكمي المداري، m_l العدد الكمي المغناطيسي ولكن تبين أنه:

- عرض الخطوط الطيفية كبير نوعاً ما وليس لكل فوتون طول موجة وحيد وهذا يعني أن الفرق بين سويتي الطاقة للإلكترون ليس محدداً وكل انتقاله سيحل الاستقرار ونفرض أن الإلكترون يقضي وقتاً في الذرة وهو في حالة اللااستقرار مقداره Δt ويرتبط مع ΔE بعلاقة هايزنبرغ

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar \Rightarrow \Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t}$$

وبالتالي عرض الخط الطيفي يتناسب عكساً مع فترة استقرار الإلكترون

- تبين أنه عند تطبيق حقل تحريض مغناطيسي تنفصل بعض الخطوط الطيفية التي كانت تظهر أنها توافق طول موجة واحد يسمى هذا المفعول بمفعول زيمان Zeeman Effect وبإدخال مفهوم السبين الذي برهن على وجوده شترن غيرلاخ Stern-Gerlach والذي ينص (أو يدرس انحراف حزمة من الذرات المتعادلة كهربائياً تحت تأثير حقل تحريض مغناطيسي غير متجانس)



التجربة: بتسخين الوعاء E الذي يحتوي ذرات فضة تخرج الذرات من الثقب باتجاه محور Oy وتمر بين قطبي مغناطيسي كهربائي فتسقط على الصفيحة P ~~على~~ وبالتالي المركبة على المحور z وعند دراسته كلاسيكياً تبين أنه:

عند دوران الإلكترون حول النواة يتولد عزم مغناطيسي للذرة $\vec{\mu} = i S \vec{n}$ حيث i شدة التيار، S سطح الدائرة التي يرسمها $\vec{n}$ الناظم على سطح الدائرة، وحيث $S = \pi r^2$

$\mu = \frac{q\omega}{2} r^2$.

وبسبب حركة الالكترون المدارية حول النواة يتولد عزم اندفاع مداري $\vec{L}$ قيمته

$$L = mrv = mr^2\omega$$ و $v = r\omega$

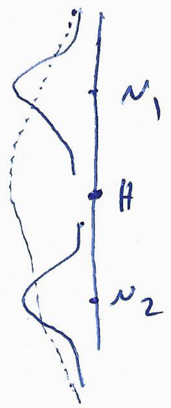
ومقارنة العزمين

$$\mu = \frac{q}{2m}L = \gamma L = \frac{\mu_B}{\hbar}L$$ و $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$ مغنيتون بور

وبما أن الطاقة الكامنة $w = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ فإن القوة (قوة لابلاس)

معدومة وبالتالي $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, w = \overrightarrow{grad}\,(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$

وأن المركبة الوحيدة لحقل التحريض المغناطيسي B_z فيكون $F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$



فيكون عند قياس الانزياح عن H من القوة F نعود إلى μ_z أو L_z

وبما أن حزمة الذرات عكس أن تأخذ كل الاتجاهات إذن

عكس أن تأخذ μ_z جميع القيم المحصورة $+\mu$, $-\mu$

أي نحصل على بقعة واحدة متناظرة بالنسبة للنقطة H ولكن

نتيجة التجربة تعطينا بقعتين متمركزتين N_1 , N_2 .

وبالتالي بالدراسة الكلاسيكية ليس هناك من تفسير.

دراسة كوانتية :

عند وجود حقل تحريض مغناطيسي يكون للمؤثر

$$\hat{w} = -\mu_z B_z = -\frac{q}{2m}B_z\hat{L}_z = \frac{eB_z}{2m}\hat{L}_z$$

فالهاملتوني يكون

$$\hat{H} = \hat{H}_n + \hat{w} = \hat{H}_n + \frac{eB_z}{2m}\hat{L}_z$$

حيث $\hat{H}_n$ هو هاملتوني الجملة قبل تطبيق حقل التحريض المغناطيسي.

إن المؤثرات $\{\hat{H}_n, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ تقبل التبادل فيما بينها مثنى مثنى وهذا يعني أن لها

مجموعة كاملة من الأشعة الخاصة المشتركة وهي $\{|n,l,m_l\rangle\}$ وهي أشعة خاصة

للهاملتوني الكلي $\hat{H}$

$$\hat{H}|n,l,m_l\rangle = \left(\hat{H}_n + \frac{eB_z}{2m}\hat{L}_z\right)|n,l,m_l\rangle = \left(E_n + \frac{eB_z}{2m}m_l\hbar\right)|n,l,m_l\rangle$$

القيم الخاصة E_{n,m_l} حيث E_n سويات طاقة ذرة الفضة في حال غياب حقل التحريض

وأما m_l يأخذ $(2l+1)$ قيمة من أجل قيمة معينة لـ l

$\Delta m = \pm 1$ و $-l \le m_l \le l$

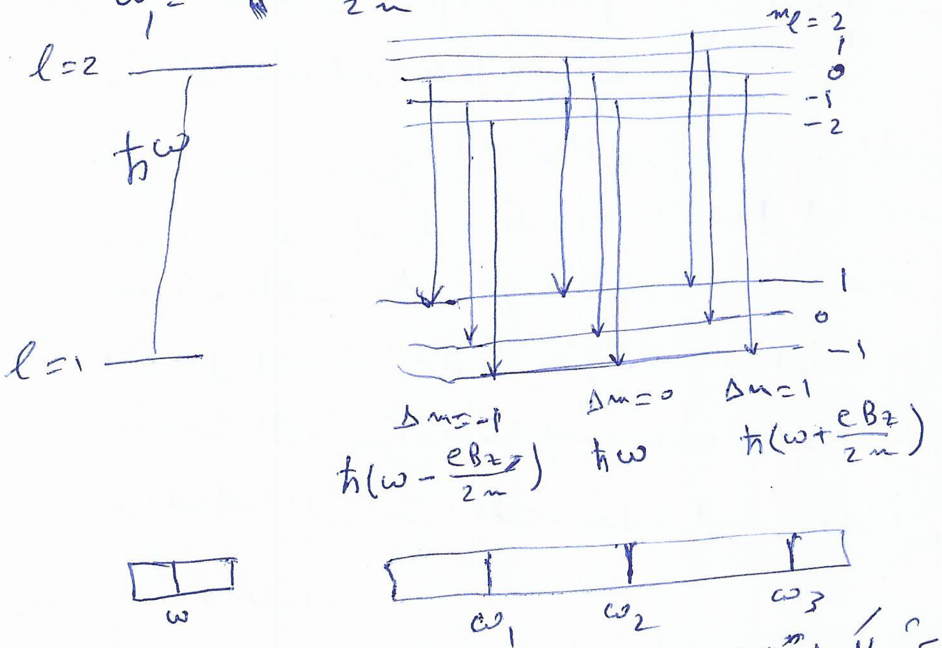
ومن أجل العدد الكمي الرئيسي n فإن l يأخذ قيمة هي $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

حيث $\Delta l = \pm 1$. وبالتالي من أجل قيمتين لـ n و l فإن سوية الطاقة

E_{n,m_l} ــــ تنقسم إلى $2l+1$ سوية جزئية.

إن الانتقال بين حالتين كموميتين مختلفتين يخضع لقواعد الانتقاء $\Delta l = \pm 1$ ، $\Delta m = 0, \pm 1$ وذلك مهما كانت n, n' وهذا يقضي بأن مفعول زيمان يؤدي إلى انقسام الخط الطيفي الناتج عن انتقال الجملة بين السويتين E_f ، E_i ذي التواتر $\omega = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ إلى ثلاث مركبات تواتراتها كالتالي:

$$\omega_1 = \omega + \frac{eB_z}{2m} \quad ، \quad \omega_2 = \omega \quad ، \quad \omega_3 = \omega - \frac{eB_z}{2m}$$



عندما غياب الحقل تتوقع النظرية الكوانتية هنا بغياب الحقل ظهور خطوط طيفية مفردة ($n=1 \Rightarrow l = m_l = 0$) ولكن بالملاحظة تبين أن معظم الخطوط الطيفية مزدوجة قريبة جداً أحدها من الآخر فمثلاً Na ($\lambda_1 = 5890 \AA$ ، $\lambda_2 = 5896 \AA$) وهذا لا يتفق مع النظرية إذاً لا بد من ترميم هذه النظرية ومن أجل ذلك سنضع مجموعة من المسلمات تسمى مسلمات باولي:

وهي للخروج من أزمة عدم تفسير مفعول زيمان ومن أجل ذلك اقترح كل من Uhlenbeck و Goudsmit الفرضية التالية:

يدور الالكترون حول نفسه ذاتياً نسميه السبين To spin وهذا الدوران يكسبه عزماً حركياً سبينياً ونرمزله بالرمز $\vec{S}$ ويرتبط به عزم مغناطيسي سبيني $\vec{\mu}_s$ معطى بالعلاقة

$$\vec{\mu}_s = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}$$

ومن أجل إعطاء السبين وصفاً كمومياً فإن باولي أضاف المسلمات التالية:

1- بما أن $\hat{S}$ هو عزم حركي ذاتي يعني أن مركباته S_x, S_y, S_z تحقق علاقات التبادل

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \quad ، \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x \quad ، \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y$$

2- يشكل المؤثران $\hat{S}^2 , \hat{S}_z$ مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها في فضاء السبين المكون من الأشعة الخاصة المشتركة لكل منهما ولتكن $\{|s, m_s\rangle\}$ وتحققان العلاقتين التاليتين:

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m_s\rangle$$

$$S_z |s, m_s\rangle = m_s \hbar |s, m_s\rangle$$

حسب النظرية العامة للعزم الحركي فإن s يمكن أن تكون عدد صحيح أو نصف عدد صحيح وأن m_s تأخذ جميع القيم المحصورة بين $-s, +s$ بحيث يكون الفرق بين قيمتين متتاليتين هو الواحد

$$-s \leq m_s \leq s \quad \text{حيث} \quad \Delta m_s = 1$$

فيمكننا تمييز جسيما ما بالعدد s فنقول إنه جسيم ذو سبين s وبالتالي يتكون الفضاء السبيني من $(2s+1)$ حالة وهي عبارة عن أشعة خاصة للمؤثر $\hat{S}^2$ تقابل القيمة الخاصة $s(s+1)\hbar^2$

3- إن فضاء الحالات للجسيم هو عبارة عن الجداء التنسوري لفضاء التوابع التربيعية المكاملة والفضاء السبيني وبالتالي

$$|n, \ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle = |n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle$$

أي كل ملحوظ فيزيائي سبيني يقبل التبادل مع أي ملحوظ فيزيائي مداري.

4- إن سبين الإلكترون يساوي $\frac{1}{2}$ وعزماً مغناطيسياً $\vec{\mu}_s = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{S}$.

نعود الآن إلى تجربة شترن – غرلاخ حيث العزم الحركي لذرة الفضة يساوي العزم السبيني للالكترون الخارجي $s = \frac{1}{2}$ وبالتالي يجب علينا إضافة الطاقة الكامنة الناتجة عن العزم الحركي الذاتي $\hat{V}_s$ والتي تمتد إلى $\frac{eB_z}{m} S_z$ إلى الهاملتوني السابق وبالتالي يصبح

$$\hat{H}' = \hat{H}_n + \hat{W} + \hat{V}_s = \hat{H}_n + \frac{eB_z}{2m}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)$$

ولنحل معادلة شرودنجر

$$\hat{H}' |n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle = [\hat{H}_n + \frac{eB_z}{2m}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)] |n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle$$

$$= [E_n + \hbar\frac{eB_z}{2m}(m_\ell + 2m_s)] |n, \ell, m_\ell, s, m_s\rangle$$

وكون $s = \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = \pm\frac{1}{2}$ فإن الطاقة

$$\cancel{E_{n,\ell,m_\ell,s,m_s}} \quad E_{n, m_\ell, m_s} = E_n + \frac{eB_z}{2m}\hbar(m_\ell \pm 1)$$

وعند وجود حقل تحريض مغناطيسي سينقسم سوية الطاقة الدنيا لذرات الفضة إ

$n=1 \,,\, \ell = m_\ell = 0 \,,\, s=\frac{1}{2} \,,\, m_s = \pm\frac{1}{2}$

سويتين تقابلان البقعتين في تجربة شترن-غيرلاخ

$$E_{1,0,\frac{1}{2}} = E_n + \frac{eB_z\hbar}{2m}$$

$$E_{1,0,-\frac{1}{2}} = E_n - \frac{eB_z\hbar}{2m}$$

- خواص الجمل ذات السبين $s=\frac{1}{2}$

إذا كان $s=\frac{1}{2} \Leftarrow m_s=\pm\frac{1}{2}$ فإن فضاء الحالات السبينية $|s,m_s\rangle$ مكون من شعاعين

$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \,,\, |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

ومجموعة هذه الأشعة تحقق علاقات التنظيم والتعامد

$$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 1$$

$$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 0$$

$\hat{S}^2|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ ؛ $\hat{S}^2|s,m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s,m_s\rangle$

$\hat{S}_z|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle = \pm\frac{1}{2}\hbar|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ ؛ $\hat{S}_z|s,m_s\rangle = m_s\hbar|s,m_s\rangle$

نعرف مؤثري الخلق والفناء $\hat{S}_\pm$ بالشكل

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

وتأثيرهما على الشعاع $|s,m_s\rangle$ هو

$$\hat{S}_\pm|s,m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm 1)}\,|s,m_s\pm 1\rangle$$

فيكون

$$S_+|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 0$$

$$S_+|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_-|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \hbar|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

$$S_-|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 0$$

يمكن تمثيل كل مؤثر في الفضاء السبيني بمصفوفة (2x2)

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\end{array} \qquad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\end{array} \quad \text{و} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\\ |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\end{array} \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

مصفوفات باولي

وبالتالي يمكن أن نكتب $\hat{S}$ بدلالة $\hat{\sigma}$ (حيث مركبات $\hat{\sigma}$ على المحاور الاحداثية هي مصفوفات باولي) بالشكل

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$$

ونجد أنه بعد كتابة المؤثرات بشكل مصفوفات فإن المتجهات الخاصة تكون مصفوفة من عمود واحد (2×1) لنرمز ب α_1 ، α_2 للشعاعين الخاصين للمؤثر $\hat{S}_z$ المقابلين للقيم الخاصة $\frac{\hbar}{2}$ ، $-\frac{\hbar}{2}$ على الترتيب ويمثل هذان الشعاعان بالشكل المصفوفي بالشكل

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ويسمى كل عمود من هذا الشكل سبينور وكل عمود من هذه الأعمدة معين إلى ثابت ضرب كيفي $e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

ومن خواص مصفوفات باولي مايلي

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1$$

$$\hat{\sigma}_k\hat{\sigma}_\ell + \hat{\sigma}_\ell\hat{\sigma}_k = 2\delta_{k\ell} \quad ; (k,\ell = x,y,z)$$

$$[\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_\ell] = 2i\,\delta_{k\ell m}\,\hat{\sigma}_m \quad ; (k,\ell,m = x,y,z)$$

وحيث

$$\delta_{k\ell m} = \begin{cases} 1 & \text{الادلة دورية} \\ -1 & \text{الأدلة غير دورية} \\ 0 & \text{شاذ ولبلات} \end{cases}$$

بالإضافة إلى ذلك فإن معينات هذه المصفوفات يساوي -1

$$\mathrm{Det}\,\hat{\sigma}_x = \mathrm{Det}\,\hat{\sigma}_y = \mathrm{Det}\,\hat{\sigma}_z = -1$$

تركيب سبينين $\frac{1}{2}$:

نفرض وجود جملة مكونة من جسيمين لهما السبين نفسه $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$ وبالتالي $m_{s_1} = m_1 = \pm\frac{1}{2}$ ، $m_{s_2} = m_2 = \pm\frac{1}{2}$ ولتكن $\hat{S}_1$ مؤثر السبين للجسيم الأول و $\hat{S}_2$ مؤثر السبين للجسيم الثاني ونفرض $\mathcal{E}_s(1)$ فضاء الحالات السبينية المتعلقة بالجسيم (1) عندما يكون بمفرده وأن مجموعة الأشعة $\{|S_1, m_1\rangle\}$ تشكل قاعدة منظمة ومتعامدة فيه إن العلاقات التالية محققة

$$\hat{S}_1^2 |S_1, m_1\rangle = S_1(S_1+1)\hbar^2 |S_1, m_1\rangle$$

$$\hat{S}_{1z} |S_1, m_1\rangle = m_1 \hbar |S_1, m_1\rangle$$

وبالمثل بالنسبة لفضاء الحالات السبينية بالجسيم 2 نجد

$$\hat{S}_2^2 |S_2, m_2\rangle = S_2(S_2+1)\hbar^2 |S_2, m_2\rangle$$

$$\hat{S}_{2z} |S_2, m_2\rangle = m_2 \hbar |S_2, m_2\rangle$$

إن المؤثرات التي تتعلق بالجسيم الأول تقبل التبادل مع جميع المؤثرات المتعلقة بالجسيم الثاني وبالتالي فعلاقات التبادل محققة :

$$[\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2] = [\hat{S}_1^2, \hat{S}_{1z}] = [\hat{S}_1^2, \hat{S}_{2z}] = 0$$

$$[\hat{S}_2^2, \hat{S}_{2z}] = [\hat{S}_2^2, \hat{S}_{1z}] = [\hat{S}_{1z}, \hat{S}_{2z}] = 0$$

وبالتالي فإن مجموعة المؤثرات $\{\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2, \hat{S}_{1z}, \hat{S}_{2z}\}$ تشكل مجموعة كاملة من الملحوظات الفيزيائية التي تقبل التبادل فيما بينها مثنى مثنى وبالتالي يكون فضاء الحالات السبينية للجملة الكلية $\mathcal{E}_s$ هو الجداء التنسوري

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s(1) \otimes \mathcal{E}_s(2)$$

ونعلم أن عناصر القاعدة في $\mathcal{E}_s(1)$ ، $\mathcal{E}_s(2)$ هي على التوالي

$$\{|S_1, m_1\rangle\} = \{|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\}$$

$$\{|S_2, m_2\rangle\} = \{|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\}$$

القاعدتين متطابقتين تماما وسنكتبها بالشكل

$$\{|1 : m_1\rangle\} = \{|1 : \tfrac{1}{2}\rangle, |1 : -\tfrac{1}{2}\rangle\}$$

$$\{|2 : m_2\rangle\} = \{|2 : \tfrac{1}{2}\rangle, |2 : -\tfrac{1}{2}\rangle\}$$

وتكون القاعدة في $\mathcal{E}_s$ هي الجداء التنسوري للقاعدتين $\mathcal{E}_s(1)$ ، $\mathcal{E}_s(2)$ ونرمز لها $|m_1, m_2\rangle$ أي

$$|m_1, m_2\rangle = |1 : m_1\rangle \otimes |2 : m_2\rangle$$

إن العنصر الأول من الشعاع $|m_1, m_2\rangle$ متعلق بالجسيم (1) والثاني متعلق بالجسيم (2)
وبالتالي تكتب القاعدة بعد حساب عدد مكوناتها من أربعة أشعة
وهي على الشكل $\quad (2S_1+1)(2S_2+1) = 4$

$$|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |1:\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |2:\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = |1:\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |2:-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |1:-\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |2:\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$|-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = |1:-\tfrac{1}{2}\rangle \otimes |2:-\tfrac{1}{2}\rangle$$

وهذه القاعدة $\{|m_1, m_2\rangle\}$ منتظمة ومتعامدة.

نعرف السبين الكلي $\hat S$ للجملة السبينية بالعلاقة $\quad \hat S = \hat S_1 + \hat S_2$
ومركباته

$$\hat S_k = \hat S_{1k} + \hat S_{2k} \quad ; \quad k = x, y, z$$

علينا برهان أن $\hat S$ يمثل عزماً حركياً ومن أجل ذلك نحسب مبدل $\hat S_x$ ، $\hat S_y$

$$[\hat S_x, \hat S_y] = [\hat S_{1x} + \hat S_{2x} \,;\, \hat S_{1y} + \hat S_{2y}]$$
$$= [\hat S_{1x}, \hat S_{1y}] + [\hat S_{1x}, \hat S_{2y}] + [\hat S_{2x}, \hat S_{1y}] + [\hat S_{2x}, \hat S_{2y}]$$
$$= i\hbar \hat S_{1z} + 0 + 0 + i\hbar S_{2z}$$
$$= i\hbar(\hat S_{1z} + \hat S_{2z}) = i\hbar \hat S_z$$

وبنفس الطريقة نجد

$$[\hat S_z, \hat S_x] = i\hbar \hat S_y \,,\quad [\hat S_y, \hat S_z] = i\hbar \hat S_z$$

يمكننا إيجاد $\hat S^2$ بتربيع $\hat S = (S_1 + S_2)$ أي

$$\hat S^2 = \hat S_1^2 + \hat S_2^2 + 2\hat S_1 \hat S_2$$

حيث تكتب بدلالة S_{1z} ، S_{2z} ، $S_{1\pm}$ ، $S_{2\pm}$

$$\hat S_1 \hat S_2 = \hat S_{1x}\hat S_{2x} + \hat S_{1y}\hat S_{2y} + \hat S_{1z}\hat S_{2z}$$
$$= \frac{1}{2}(\hat S_{1+}\hat S_{2-} + \hat S_{1-}\hat S_{2+}) + \hat S_{1z}\hat S_{2z}$$

وملاحظة أن كلاً من $\hat S_1$ ، $\hat S_2$ يقبلان التبادل مع كل من $\hat S_1^2$ ، $\hat S_2^2$ وبالتالي المركبة

$$[\hat S^2, \hat S_1^2] = [\hat S^2, \hat S_2^2] = 0$$
$$[\hat S_z, \hat S_1^2] = [\hat S_z, \hat S_2^2] = 0$$

وأيضاً أن $\hat S_z$ يقبل التبادل مع S_{1z} ، S_{2z} أي

$$[\hat S_z, \hat S_{1z}] = [\hat S_z, \hat S_{2z}] = 0$$

إن مجموعة المؤثرات $\{\hat S_z, \hat S^2, \hat S_2^2, \hat S_1^2\}$ تشكل مجموعة كاملة من المؤثرات التي ياتيها التي تقبل التبادل فيما بينها مثنى مثنى. ولنرمز بـ $\{|s,m_s\rangle\}$ للمجموعة الأشعة الخاصة المشتركة لها وبالتالي هي عنصر العلاقات

$$\hat S_1^2|s,m_s\rangle = \hat S_2^2|s,m_s\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|s,m_s\rangle$$

$$S^2|s,m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|s,m_s\rangle$$

$$\hat S_z|s,m_s\rangle = m_s\hbar|s,m_s\rangle$$

$\hat S$ عزم حركي كما رأينا سابقاً وبالتالي فإن s هو عدد صحيح أو نصف عدد صحيح و m_s بحيث تكون $-s < m_s < s$ و $\Delta m_s = 1$ ولنجد مجموعة الأشعة $\{|s,m_s\rangle\}$ وهي $(2s_1+1)(2s_2+1)=4$ بدلالة الأشعة $\{|m_1,m_2\rangle\}$ وبما أن $s=s_1+s_2$ فإن s تأخذ القيم $|s_1-s_2| \le s \le s_1+s_2$ حيث $\Delta s=1$

وبالتالي فإن قيم s هي $s=0,\ 1$

عندما $s=0 \Leftarrow m_s=0$

$s=1 \Leftarrow m_s=0,\pm1$

وبالتالي فإن أشعة القاعدة $\{|s,m_s\rangle\}$ هي

$$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,0\rangle\}$$

وجدنا سابقاً أن $\hat S_z$ تقبل التبادل مع كل مؤثر من المجموعة $\{\hat S_1^2, \hat S_2^2, \hat S_{1z}, \hat S_{2z}\}$ وهذا يعني أن أشعة القاعدة هي أشعة خاصة لـ $\hat S_z$

$$\hat S_z|m_1,m_2\rangle = (\hat S_{1z}+\hat S_{2z})|m_1,m_2\rangle$$
$$= \hat S_{1z}|m_1,m_2\rangle + \hat S_{2z}|m_1,m_2\rangle$$
$$= m_1\hbar|m_1,m_2\rangle + m_2\hbar|m_1,m_2\rangle$$
$$= (m_1+m_2)\hbar|m_1,m_2\rangle$$

هذا يعني أن $m_s = m_1+m_2$

ولندرس الآن الشعاع $|m_1,m_2\rangle = |\frac12,\frac12\rangle$ وهو شعاع خاص للمؤثر $\hat S_z$ مقابل للقيمة الخاصة $\hbar$ حيث $m_s=\frac12+\frac12=1$ وبالعودة إلى قيم s نجد أنه يجب أن يساوي $s=1$. إن الشعاع $|\frac12,\frac12\rangle$ هو أيضاً شعاع خاص للمؤثر S^2 وبما أن m_s غير منطبقة إذن يكون لدينا:

$$|1,1\rangle = |\tfrac12,\tfrac12\rangle$$

- نطبق المؤثر $\hat{S}_-$ على الشعاع $|1,1\rangle$ فنحصل على

$$S_\pm |s,m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}\,|s,m_s\pm1\rangle$$

$$\hat{S}_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle$$

فيكون الشعاع

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt2}S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt2}S_-|\tfrac12,\tfrac12\rangle$$

وبما أن $S=S_1+S_2$ فإن

$$S_-=S_{1-}+S_{2-}$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt2}(S_{1-}+S_{2-})|\tfrac12,\tfrac12\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt2}\left[\hat{S}_{1-}|\tfrac12,\tfrac12\rangle + \hat{S}_{2-}|\tfrac12,\tfrac12\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt2}\left[\hbar|-\tfrac12,\tfrac12\rangle + \hbar|\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt2}\left[|-\tfrac12,\tfrac12\rangle + |\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right]$$

- بتطبيق S_- على $|1,0\rangle$ نحصل على الشعاع $|1,-1\rangle$:

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt2}S_-|1,0\rangle$$
$$= \frac{1}{\hbar\sqrt2}(\hat{S}_{1-}+\hat{S}_{2-})\left\{\frac{1}{\sqrt2}\left[|-\tfrac12,\tfrac12\rangle + |\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{2\hbar}\left[\hbar|-\tfrac12,-\tfrac12\rangle + \hbar|-\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right] = |-\tfrac12,-\tfrac12\rangle$$

ولإيجاد الشعاع المقابل لقيمة $S=0$ ، $m_s=0$ نلاحظ أننا نستطيع الحصول على $m_s = m_1+m_2=0$ بطريقتين في حالة $m_1=\frac12$ ، $m_2=-\frac12$ والحالة $m_1=-\frac12$ ، $m_2=\frac12$ ولهذا نفرض أن الشعاع $|0,0\rangle$ هو عبارة عن تركيب خطي للشعاعين $|-\frac12,\frac12\rangle$ ، $|\frac12,-\frac12\rangle$ أي أن

$$|0,0\rangle = \alpha|\tfrac12,-\tfrac12\rangle + \beta|-\tfrac12,\tfrac12\rangle$$

ولتعيين α,β نفرض على الشعاع $|0,0\rangle$ أن يكون منظماً وهي حالة وحيدة بينما الحالات $|1,m_s\rangle$ هي حالات ثلاثية لأن $m_s=0,\pm1$ وهي حالات تناظرية

العزم الحركي الالكتروني الكلي :

بالتعريف هو مجموع العزم المداري $\hat{L}$ والعزم السبيني $\hat{S}$

ومركباته تكون

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$$

$$\hat{J}_k = \hat{L}_k + \hat{S}_k \quad ; \quad k = x, y, z$$

وبما أن $\hat{J}$ هو عزم حركي وبالتالي فإن مركباته تحقق علاقات التبادل التالية

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y \quad , \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x \quad , \quad [\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z$$

ولنبرهن على صحة إحدى هذه العلاقات :