كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثالثة**

المادة : تحليل عددي

المحاضرة: الثامنة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

التكامل

ليكن $y = f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ نوجد التابع الأصلي $F(x)$ للتابع المكامل $f(x)$ و نكتب:

$$\int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

و لكن في بعض الأحيان يكون من الصعب إيجاد التابع الأصلي أو يكون التابع معطى بجدول، عندئذٍ نوجد قيماً تقريبية للتكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة المستطيلات أو أشباه المنحرفات و طرقاً أخرى، لنتعرف بدايةً على طريقة المستطيلات.

طريقة المستطيلات:

نعلم أن المعنى الهندسي للتكامل المحدد $\int_a^b f(x).dx$ هو المساحة الواقعة تحت منحني التابع $f(x)$ و تعتبر مساوية تقريباً لمساحة المستطيل تحت منحني التابع أي:

$\int_a^b f(x).dx \approx (b-a)f(a)$ و كلما كان طول المجال $[a,b]$ صغيراً كلما كان الخطأ في حساب المساحة صغيراً.

تعتمد هذه الطريقة على تجزئة المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

حيث: $x_{i+1} - x_i = h$

عندئذٍ تكون قيمة التكامل العددي $\int_a^b f(x).dx$ مساوية لمجموع مساحات سطوح مستطيلات التجزئة s_i حيث $i = 0,1,\dots,n-1$ و طول المستطيل s_i هو $f(x_i)$ و عرضه h.

فتكون مساحة المستطيل s_i هي: $s_i = h.f(x_i); i = 0,1,\dots,n-1$

و منه: $\int_a^b f(x).dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} h.f(x_i)$ أي:

$$S = \int_a^b f(x).dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

$S = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$ و يكون الخطأ المرتكب $E = \frac{b-a}{2}.h.\acute{f}(c); c \in [a,b]$

$$E \leq \frac{b-a}{2}.h.M; M = max\{|\acute{f}(a)|, |\acute{f}(b)|\}$$

مثال: احسب القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + x^2\right).dx$ بطريقة المستطيلات حيث $n = 5$.

الحل: لدينا $a = 0, b = 1$ و $n = 5$ بالتالي $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$

$x_0 = 0\,, f(0) = 0.25\,, x_1 = 0 + 0.2 = 0.2\,, f(0.2) = 0.29$

$x_2 = 0.2 + 0.2 = 0.4\,, f(0.4) = 0.41$

$x_3 = 0.4 + 0.2 = 0.6\,, f(0.6) = 0.61$

$x_4 = 0.6 + 0.2 = 0.8\,, f(0.8) = 0.89$ و $x_5 = 1, f(1) = 1.25$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + x^2\right).dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{4} + x^2\right).dx \approx 0.2[0.25 + 0.29 + 0.41 + 0.6 + 0.89] = 0.49$$

مثال: استخدم طريقة المستطيلات لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h = 0.1$ و احسب الخطأ المرتكب.

الحل: $\frac{1-0}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0.1(1 + 0.90909 + 0.83333 + 0.76923 + 0.71428 + 0.66667 + 0.625 + 0.58824 + 0.55556 + 0.52632) = 0.71877$$

$$E \leq \frac{b-a}{2}.h.M = \frac{1-0}{2}.(0.1).M = (0.05).M$$

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = f'(0) = -1 \\ f'(x_{10}) = f'(1) = -0.25 \end{cases}$ و منه: $M = max\{|-0.25|, |-1|\} = 1$

$$E \leq (0.05)(1) = 0.05$$

طريقة أشباه المنحرفات:

ليكن $y = f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a, b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة أشباه المنحرفات نقسم المجال $[a, b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ بواسطة النقاط:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ حيث: $x_{i+1} - x_i = h$

عندئذٍ تكون قيمة التكامل العددي $\int_a^b f(x).dx$ مساوية لمجموع مساحات أشباه المنحرفات التي ارتفاع كل منها $h = x_{i+1} - x_i$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \left[\left([f(x_0)+f(x_1)]\frac{x_1-x_0}{2}\right)+\left([f(x_1)+f(x_2)]\frac{x_2-x_1}{2}\right)+\cdots+\left([f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right)\right]$$

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{2}[y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i]$ قانون التكاملات التقريبية بطريقة شبه المنحرف.

و يكون الخطأ المرتكب: $E \leq \frac{b-a}{12}.h^2.M; M = max\{|f''(a)|,|f''(b)|\}$

مثال: استخدم طريقة أشباه المنحرفات لإيجاد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h = 0.1$.

الحل:

$\frac{1-0}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$S \approx \frac{h}{2}[y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{9}y_i]$ و منه:

$$S \approx \frac{0.1}{2}[1+0.5+2(0.90909)+2(0.83333)+2(0.76923)+2(0.71428)+2(0.66667)+2(0.625)+2(0.58824)+2(0.55556)+2(0.52632)] = 0.69376$$

$\acute{f}(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ و منه: $f''(x_0) = f''(0) = 2$ و

$f''(x_{10}) = f''(1) = 0.25$ و بالتالي $M = 2$ و يكون الخطأ المرتكب:

$$E \leq \frac{1-0}{12}(0.1)^2(2) = 0.001666$$

طريقة سيمبسون:

ليكن $y = f(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$، عندئذٍ لحساب قيمة التكامل $\int_a^b f(x).dx$ بطريقة سيمبسون نقسم المجال $[a,b]$ إلى n من المجالات الجزئية المتساوية في الطول و طول كل منها $h = \frac{b-a}{n}$ و حيث n عدد زوجي، أي نستطيع أن نكتب:

$[a,b] = [x_0,x_2] \cup [x_2,x_4] \cup \ldots \cup [x_{n-2},x_n]$ نوجد حدودية استيفاء نيوتن على المجال $[x_0,x_2]$ و نقربها إلى تابع من الدرجة الثانية أي: $P(x) = P_n(\alpha) = y_0 + \alpha\Delta y_0 + \binom{\alpha}{2}\Delta^2 y_0$ و منه:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx \int_{x_0}^{x_2}\left(y_0+\alpha\Delta y_0+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).dx$$

و بما أن $\alpha = \frac{x-x_0}{h}$ و منه $x = \alpha h + x_0$ فإن $dx = h.d\alpha$ و بالتالي:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx \int_{x_0}^{x_2} \left(y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).dx$$

$$= \int_0^2 \left(y_0 + \alpha\Delta y_0 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\Delta^2 y_0\right).h.d\alpha$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx h.\left[y_0\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 y_0\right]_0^2 = h.\left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x).dx \approx h.\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2]$$

التكامل على المجال $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x).dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x).dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x).dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x).dx$$ و منه:

$$\int_a^b f(x).dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n]$$

و هذه العلاقة ندعوها طريقة سيمبسون لحساب التكامل.

و يعطى الخطأ المرتكب بهذه الطريقة بالعلاقة:

$$E \le \frac{b-a}{180}.h^4.M; M = max\{|f^{(4)}(x_0)|, |f^{(4)}(x_n)|\}$$

مثال: استخدم طريقة سيمبسون لحساب قيمة تقريبية للتكامل $S = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ علماً أن $h = 0.1$ و احسب الخطأ المرتكب.

الحل:

$\frac{1-0}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$ و تكون $x_{i+1} = x_i + h$ بالتالي:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1	0.90909	0.83333	0.76923	0.71428	0.66667	0.625	0.58824	0.55556	0.52632	0.5

$$S \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_n) + y_n]$$

$$S \approx \frac{h}{3}[1 + 4(0.90909 + 0.76923 + 0.66667 + 0.58824 + 0.52632) + 2(0.83333 + 0.71428 + 0.625 + 0.55556) + 0.5] = 0.69315$$

$$\acute{f}(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \text{ و } f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \text{ و } f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \text{ و } f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{24}{(0+1)^5} = 24 \text{ و } f^{(4)}(1) = \frac{24}{(1+1)^5} = 0.75$$

$$E \le \frac{1-0}{180}.(0.1)^4.(24) = 0.0000133 ; M = max\{|0.75|, |24|\}$$

ملاحظة: إذا كان عدد المجالات الجزئية المتساوية في الطول من المجال $[a,b]$ عدداً فردياً فإن طريقة سيمبسون لا تطبق على كامل المجال $[a,b]$ إنما تطبق طريقة سيمبسون على أكبر عدد زوجي من المجالات الجزئية و نطبق طريقة أشباه المنحرفات على المجال الجزئي الأخير.

مثال: أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}.dx$ حيث $h = 0.2$ بطريقة سيمبسون.

لدينا $n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0.2} = 5$ و هو عدد فردي

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	0.961	0.852	0.698	0.527	0.368

$$S \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4] + \frac{h}{2}[y_4 + y_5]$$

$$S \approx \frac{h}{3}[1 + 4(0.961 + 0.698) + 2(0.852) + 0.527] + \frac{h}{2}[0.527 + 0.368] = 0.7473$$

تمارين عملي:

أوجد القيمة التقريبية للتكاملات الآتية:

$\int_1^6 (2 + \sin 2\sqrt{x}).dx$ حيث $h = 0.5$ (بطريقة المستطيلات)

$\int_{0.5}^1 x.\mathrm{e}^x.dx$ حيث $h = 0.05$ (بطريقة أشباه المنحرفات)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin x}.dx$ حيث $h = \frac{\pi}{8}$ (بطريقة سيمبسون)