كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : السابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تقويس المنحني:

إن تقويس المنحني $\vec{r}$ عند النقطة M (صيغ البيك المحرك في اللحظة t).
هو المقدار الحقيقي $k(t)$ الذي يعبر عن سرعة تغير متجاع واحدة لمماس في اللحظة t.

$$k(t) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \frac{\vec{T}'}{\vec{r}'} \right| \quad \ldots(1)$$

ويسمى المقدار المعكوس $\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$ نصف قطر التقويس في اللحظة t.

مثال: احسب تقويس المنحني اللولبي الدائري المعطى بالتابع الشعاعي التالي:

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$|\vec{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

التقوس:

$$k(t) = \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

نصف قطر التقوس:

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = 2$$

مبرهنة (1):

* إذا كان المنحني Γ خط مستقيماً في الفراغ فإن التقوس معدوم.
* إذا كان المنحني Γ تقوسه معدوم في جميع نقاطه أي أن $k(t)=0$ ؛ $\forall t \in \mathbb{R}$ فإن Γ مستقيماً.

مبرهنة (2):

* إذا كان المنحني Γ دائرياً فإن تقوسه ثابت موجباً تماماً.
* إذا كان المنحني Γ تقوسه ثابت موجب تماماً في جميع نقاطه

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أي أن:

$$\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow k(t) = c > 0$$

فإن Γ هو المخني اللولبي.

التسارع المماسي والناظمي:

* لتكن M نقطة مادية متحركة على المخني Γ معلم بالتابع الشعاعي $\vec{r}(t)$ عندئذٍ $\vec{v}(t) = r'(t)$ هو شعاع سرعة النقطة في اللحظة t كما أن $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$ هو شعاع تسارع النقطة M في اللحظة t

* سنرمز أيضاً لشدة سرعة $|\vec{v}(t)| = v(t)$

بما أن شعاع السرعة:

$$\vec{v}(t) = v(t)\,\vec{T}(t)$$

عند نقطة من المخني سيكون مماس المخني عند تلك النقطة وموجهة بجهة شعاع واحدة المماس $\vec{T}$

فإن:

$$\vec{v} = v\,\vec{T}$$

وبالتالي:

$$\vec{a} = (v\vec{T})' = v'\vec{T} + v\vec{T}'$$

لكن:

$$k(t) = \frac{|\vec{T}'|}{|\vec{r}'|} = \frac{|\vec{T}'|}{v}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow v(t).k(t)$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

$$\Rightarrow \vec{T}'(t) = |\vec{T}'(t)|\,\vec{N}(t)$$

$$\vec{T}'(t) = v(t).k(t).\vec{N}(t)$$

وبالتالي:

$$\vec{a}(t) = v'(t)\,\vec{T}(t) + v(t)\,v(t)\,k(t).\vec{N}(t)$$

$$\vec{a}(t) = (v')\,\vec{T} + (v^2.k)\,\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

* حيث a_T المشاريع المحاسبي الحصول على المحاسب a_N المشاريع الناظمي الحصول على الناظم.

$$a_T = v' = (|v(t)|)' = (|r'(t)|)'$$

$$a_N = v^2.k = (\vec{v}(t))^2.k(t)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

* ليكن Γ منحني ما ولنرمز s لفاصلة المنحنية وليكن $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ المثلث المرتبط في أي نقطة M منه في أي نقطة M وهي توابع شعاعية للمتحول t وكذلك (s) عندئذٍ

$$\frac{d\vec{B}}{ds} \parallel \vec{N}$$

(سؤال امتحاني أوجد المثلث في نقطة)

البرهان:

بما أن $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ بالتالي:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{N} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

$$\underbrace{k\, \vec{N} \wedge \vec{N}}_{=0} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \vec{T} \wedge \frac{d\vec{N}}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{B}}{ds} \perp \vec{T}$$

وبما أن طول $\vec{B}$ ثابت مشتقه يعامد أي أن

$$\frac{dB}{ds} \perp \vec{B}$$

وبالتالي $\frac{dB}{ds} \parallel \vec{N}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التقاف منحني فراغي:

عرفنا سابقاً أن تقوس المنحني فراغي عند النقطة M_0 يبلغ المتجه في اللحظة t_0 هو عدد حقيقي غير سالب:

$$k(t_0) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds}(T_0) \right|$$

وفي البرهنة السابقة لدينا:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} \parallel \vec{N}$$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي $\tau(t)$ وحيد بحيث:

$$\frac{dB}{ds}(t_0) = \tau(t_0)\,\vec{N}(t_0)$$

ندعو τ التقاف المنحني الفراغي عند النقطة M_0 في اللحظة t_0 وبالتالي:

$$|\tau(t_0)| = \left| \frac{dB}{ds}(t_0) \right|$$

دستور فرينيه الأول:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}(t) = k(t)\,\vec{N}(t)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وسنقوم فرينيه الثاني:

$$\frac{d\vec{B}}{ds}(t) = -\tau(t)\,\vec{N}(t)$$

لحساب $\frac{d\vec{N}}{ds}(t)$ لدينا

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{ds} \wedge \vec{T} + \vec{B} \wedge \frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\tau\,\vec{N} \wedge \vec{T} + k\,\vec{B} \wedge \vec{N}$$

$$= \tau\,\vec{B} - k\,\vec{T}$$

وهكذا نحصل على قانون فرينيه الثالث:

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - k\vec{T}$$

يمكن التعبير عن المساواتين الثلاث معاً كما يلي:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المماسات المستوية للتقويس والالتفاف:

التقويس

$$|k(t)| = \frac{|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

الالتفاف

$$\tau = \frac{(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t), \vec{r}'''(t))}{|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)|^2}$$

مثال بسيط: نقاط مضاعفة.

* ليكن لدينا التابع الشعاعي التالي:

$$\vec{r}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (t^3+5)\vec{i} + (6t-7)\vec{j} + (3t^2+1)\vec{k}$$

a) هل هو أملس عند جميع نقاطه.

b) أحسب التقويس والالتفاف عند جميع نقاطه الأملس عندها.

$$\vec{r}(t) = (t^3+5, 6t-7, 3t^2+1)$$

$$\vec{r}'(t) = (3t^2, 6, 6t)$$

$$\vec{r}''(t) = (6t, 0, 6)$$

$$\vec{r}'''(t) = (6, 0, 0)$$

a) نلاحظ أن $|\vec{r}'(t)| \neq 0$ في أجل $t \in \mathbb{R}$ لذلك التابع أملس

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3t^2 & 6 & 6t\\ 6t & 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$=36\vec{i}-(18t^2-36t^2)\vec{j}-36t\vec{k}$$

$$=36\vec{i}+18t^2\vec{j}-36t\vec{k}$$

$$|\vec{r}'(t)\wedge\vec{r}''(t)|=\sqrt{(36)^2+(18)^2t^4-(36)^2t^2}$$

$$=18\sqrt{t^4-4t^2+4}\quad=18(t^2-2)$$

$$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{9t^4+36+36t^2}$$

$$=3\sqrt{t^4+4t^2+4}\quad=3\sqrt{(t^2+2)^2}\quad=3(t^2+2)$$

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'\wedge\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}=\frac{18(t^2-2)}{|3(t^2+2)|^3}$$

$$\Rightarrow k(t)=\frac{2(t^2-2)}{3(t^2+2)^3}$$

$$(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')=\begin{vmatrix}3t^2 & 6 & 6t\\ 6t & 0 & 6\\ 6 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$= 6(36-0) - 0 + 0 = 6 \cdot 36 = 216$

الالتفاف:

$$\tau(t) = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|^2} = \frac{216}{(18(t-2))^2} \quad ; \forall t \in \mathbb{R}$$

الانحناء القوس حالالتفاف $A(5,-7,1)$

$$r(t) = (t^3+5, 6t-7, 3t^2+1)$$

نعوض بدل t صفر.

النقطة A تقابل $t=0$

$$k(0) = \frac{-4}{3(2)^3} = \frac{-1}{6}$$

الالتفاف:

$$\tau(0) = \frac{216}{(18)^2 \cdot 4}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* أوجد كل من التقوس والالتفاف للمنحني المعطى بالتابع الشعاعي:

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\vec{r}(t) = (2t^2, t^2+1, 3t)$

$\vec{r}'(t) = (4t, 2t, 3)$

$\vec{r}''(t) = (4, 2, 0)$

$\vec{r}'''(t) = (0, 0, 0)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{16t^2+4t^2+9} = \sqrt{20t^2+9}$

$|\vec{r}'(t)| \neq 0$ من أجل $t \in \mathbb{R}$ وبالتالي المنحني أملس.

$$\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & 2t & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -6t\vec{i} + 12\vec{j} + 0\vec{k}$

$|\vec{r}'(t) \wedge \vec{r}''(t)| = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = 2\sqrt{45}$

$$k(t) = \frac{2\sqrt{45}}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tau = \frac{0}{2\sqrt{45}} = 0$$

لأن $\vec{r}'''(t)$ يساوي $(0,0,0)$ وهو معدوم الخطأ

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الثالثة في نقطة $(\vec{T}, \vec{B}, \vec{N})$

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{(4t, 2t, 3)}{\sqrt{20t^2+9}}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'}{|\vec{T}'|}$$

$$\vec{T} = \underbrace{\frac{4t}{\sqrt{20t^2+9}}}_{f_1(t)}\vec{i} + \underbrace{\frac{2t}{\sqrt{20t^2+9}}}_{f_2(t)}\vec{j} + \underbrace{\frac{3}{\sqrt{20t^2+9}}}_{f_3(t)}\vec{k}$$

$$\vec{T}' \Rightarrow f_1' = \frac{4.(\sqrt{20t^2+9} - \frac{40t}{2\sqrt{20t^2+9}}.4t}{(\sqrt{20t^2+9})^2}$$

$$= \frac{4(20t^2+9) - 80t^2}{(\sqrt{20t^2+9})^3} = \frac{36}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_2' = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_3' = \frac{0 - 40t}{2\sqrt{20t^2+9}}.(3) = \frac{-60t}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{T}' = \frac{36}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} + \frac{18}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} - \frac{60t}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}$$

$$|\vec{T}'| = \frac{1}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{(36)^2+(18)^2+(60t)^2}$$

$$= \frac{1}{(20t^2+9)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1620+3600t^2}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{(36, 8, -60t)}{\sqrt{1620+3600t^2}}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & 2t & 3 \\ 36 & 18 & -60t \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{20t^2+9} \cdot \sqrt{1620+3600t^2}}$$

$$= \left[-120t^2 - (18 \times 3)\vec{i} - (4t(-60t) - 3(36))\vec{j} + (4t(18) - 36(2t))\vec{k} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{20t^2+9}\sqrt{1620+3600t^2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة