كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الثانية

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المنحني: هو تابع بشعاعي من الشكل:

$$\vec{f}: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \to \vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

$$\vec{f}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

مرمز عادة للمنحني بـ c.

1. المنحني c بدايته $\vec{f}(a)$ ونهايته $\vec{f}(b)$
2. المنحني c $\Leftrightarrow$ $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$
3. نقول عن النقطة $r_0 \in c$ إنها مضاعفة إذا وفقط وجد $t_1 \neq t_2$ من $[a,b]$ بحيث $\vec{f}(t_1) = \vec{f}(t_2)$

تعريفات:

a. المنحني البسيط: نقول عن المنحني أنه بسيط إذا كان لا يحوي نقاطاً مضاعفة.

b. النقطة الشاذة: نقول عن $t_0 \in [a,b]$ إنها شاذة إذا وفقط إذا كانت $\vec{r}(t_0) = 0$ وإلا فهي نظامية.

c. المنحني الأملس: هو المنحني الذي يحقق الشرط التالي:

$$\forall z \in [a,b] \Rightarrow \vec{r}'(t) \neq 0$$

مثال: ليكن التابعان الشعاعيان التاليان:

$$\vec{r}_1 : [-1,+1] \to \mathbb{R}^3 : \vec{r}_1(t) = t^2\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 : [-1,+1] \to \mathbb{R}^3 : \vec{r}_2(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + e^t\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1'(t) = (2t, -\sin t, 0)$$

$$\vec{r}_2'(t) = (2t, 3t^2, e^t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1'(0) = 2(0)\vec{i} - \sin 0\,\vec{j} + 0\vec{k} = 0$$

وبالتالي $\vec{r}_1$ ليس أملس بالمقابل $\vec{r}_2$ أملس

$$\forall t \in [-1,+1] \Rightarrow \vec{r}_2'(t) \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف:

شعاع واحدة المماس $\vec{T}$: ليكن $\vec{f}$ منحنٍ أملس عندها شعاع الواحدة للمماس

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|} \quad \dots(1)$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}\right)$$

$$\vec{T}(t) = \vec{\nabla} f$$

تابع سلمي

- تعريف شعاع واحدة الناظم الأساسي:

ليكن $\vec{f}$ منحنٍ قابل للاشتقاق مرتين عندها شعاع واحدة الناظم الأساسي

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|} \quad \dots(2)$$

- وشعاع واحدة ثنائي الناظم:

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

$$= \frac{\vec{f}' \wedge \vec{f}''}{|\vec{f}' \wedge \vec{f}''|} \quad \dots(3)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

1) $\vec{B} * \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{N}$

2) $\vec{B} * \vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{T}$

* إذا كان لدينا المنحني $\vec{F}$

$\vec{F}(t) = (t^3, 3t^2, 1) \quad ; t \in \mathbb{R}$

أوجد كل من $\vec{B}$ ، $\vec{N}$ ، $\vec{T}$

- بشعاع واحدة المماس يعطى بالعلاقة:

$$\vec{T} = \frac{\vec{F}'(t)}{|\vec{F}'(t)|} = \frac{(3t^2, 6t, 0)}{\sqrt{9t^4 + 36t^2}} = \frac{(3t^2, 6t, 0)}{3t\sqrt{t^2+4}}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}\vec{j}$$

بشعاع واحدة الناظم الرئيسية

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

$$\vec{T}'(t) = \sqrt{t^2+4} - t \cdot \frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}\vec{i} + (-2)\frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}\vec{j}$$

(t^2+4) $\qquad$ (t^2+4)

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\Rightarrow \frac{t^2+4-2t^2}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}}\vec{i} - \frac{2t}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}}\vec{j}$$

$$= \frac{t^2+4-2t^2}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} - \frac{2t}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\vec{j} \Rightarrow \frac{4-t^2}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\vec{i} - \frac{2t}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\vec{j}$$

$$|\vec{r}'(t)| = \frac{1}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{(4-t^2)^2+4t^2}$$

$$= \frac{1}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{16+t^4-8t^2+4t^2}$$

$$= \frac{\sqrt{t^4-4t^2+16}}{(t^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{4-t^2}{\sqrt{t^4-4t^2+16}}\vec{i} - \frac{2t}{\sqrt{t^4-4t^2+16}}\vec{j}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} & \frac{2}{\sqrt{t^2+4}} & 0 \\ \frac{4-t^2}{\sqrt{t^4-4t^2+16}} & \frac{-2t}{\sqrt{t^4-4t^2+16}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{-2t^2}{\sqrt{t^2+4}\sqrt{t^4-4t^2+16}} - \frac{2(4-t^2)}{\sqrt{(t^2+4)(t^4-4t^2+16)}} \right) \vec{k}$$

تعاريف:

ليكن التابع الشعاعي: $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$

1) معادلة المستقيم المماس D للمنحني C عند النقطة M_0 يعطى بالعلاقة:

$$D: \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z-h(t_0)}{h'(t_0)} \quad \ldots(4)$$

مثال: النقطة $M_0(1,0,1)$

$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + e^t\vec{k}$

النقطة M_0 تقابل $t_0 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, e^t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$

$\vec{r}(0) = (1, 0, 1)$, $\vec{r}'(0) = (0, 1, 1)$

$\Rightarrow D = \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

2) يعرف المستوي الناظمي P للمخنى c عند النقطة M_0 :

بأنه المستوي P المار بالنقطة M_0 والذي يعامد المستقيم المماس D للمخنى c عند النقطة M_0 ونقطه معادلته بالعلاقة:

$f'(t_0)(x - f(t_0)) + g'(t_0)(y - g(t_0)) + h'(t_0)(z - h(t_0)) = 0$

$P : 0 + 1(y) + 1(z-1) = 0$

$\Rightarrow y + z = 1$

طول المخنى: ليكن c مخنى أملس عندها طول المخنى منحنيه t هو:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(t)|\, dt \quad \ldots (6)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = |f'(t)| \Rightarrow \vec{s}'(t) = |\vec{r}'(t)|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: احسب طول المنحني المثل بدائرة نصف قطرها r.

$$\vec{P} = [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

$$t \to (r\cos t, r\sin t) \quad t > 0$$

$$x = r\cos t \quad , \quad y = r\sin t$$

$$S(t) = \int_0^t |(-r\sin t, r\cos t)|\, dt$$

$$S(t) = \int_0^t \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^t r\, dt = [rt]_0^t = rt$$

$$t = 2\pi \Rightarrow S(2\pi) = 2\pi r$$

ليكن التابع الشعاعي:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (t^3, 3t^2 - 2, 6t + 1)$$

1- احسب معادلة المستقيم المماس والمستوي الناظمي للتابع الشعاعي السابق في النقطة $B(1,1,7)$

2- أثبت أن $|r'(t)| = 3(t^2+2)$ ثم احسب طول قوس المنحني c من منحني التابع الشعاعي السابق والمحدد بالنقطتين

$A(0,-2,1)$, $B(1,1,7)$

الحل:

النقطة $B(1,1,7)$ تقابل $t=1$

$\vec{r}(t) = (t^3, 3t^2-2, 6t+1)$

$\vec{r}'(t) = (3t^2, 6t, 6)$

$r'(1) = (3, 6, 6)$

$f'(t_0)$ $g'(t_0)$ $h'(t_0)$

معادلة المستقيم المماس تعطى بالعلاقة:

$$D: \frac{x-f(t_0)}{f'(t_0)} = \frac{y-g(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{z-h(t_0)}{h'(t_0)}$$

$$D: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-7}{6}$$

معادلة المستوي الناظم تعطى بالعلاقة:

$$P: f'(t_0)(x-f(t_0)) + g'(t_0)(y-g(t_0)) + h'(t_0)(z-h(t_0)) = 0$$

$$= 3(x-1) + 6(y-1) + 6(z-7) = 0$$

(2

$\vec{r}'(t) = (3t^2, 6t, 6)$

$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{9t^4+36t^2+36} = 3\sqrt{t^4+4t^3+4}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= 3\sqrt{(t^2+2)^2} = 3(t^2+2)$$

طول قوس المنحني المحدد بالنقطتين $A(0,-2,1)$ تقابل $t=0$

$B(1,1,7)$ تقابل $t=1$

$$s(t) = \int_0^1 |r'(t)|\,dt = 3\int_0^1 (t^2+2)\,dt$$

$$= 3\left|\frac{t^3}{3} + 2t\right|_0^1 = 7$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z