كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل عقدي ومتجهي

المحاضرة : الخامسة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

تعريف التابع السلمي:

لتكن $W \subseteq \mathbb{R}$ ، لنأخذ $f : W \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

مجموعة النقاط في المستوي الديكارتي $(x, f(x))$ تدعى منحني

التابع البياني f : تابع سلمي

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2$

التابع الشعاعي: $\vec{f} : W \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

نكتب:

$$\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$$

وتكون المعادلات الوسيطية: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$

حيث: f_1 , f_2 , f_3 توابع سلمية معرفة على W_1 , W_2 , W_3
على الترتيب (مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$)
تكون $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3$ مجموعة تعريف $\vec{f}$.

مثال: $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{2t}\,\vec{j} + \vec{k}$

$f_1(t) = t \qquad W_1 = \mathbb{R}$

$f_2(t) = \sqrt{2t} \qquad W_2 = [0,+\infty[$

$f_3(t) = 1 \qquad W_3 = \mathbb{R}$

مجموعة تعريف $\vec{r}$: $W = W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \mathbb{R} \cap [0,+\infty[\cap \mathbb{R}$

$$W = [0,+\infty[$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2+2t+1} = \sqrt{(t+1)^2} = |t+1|$$

ملاحظة:

* المستقر الفعلي للتابع الشعاعي: هي مجموعة النقاط التي يرسمها هذا التابع.

مثال: أوجد المستقر الفعلي للتابع الشعاعي: $\vec{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\vec{f}(t) = (t^2 - 2t \,,\, t+1)$

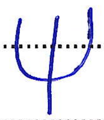
$x = t^2 - 2t$ $\qquad y = t+1 \Rightarrow t = y-1 \dots (*)$

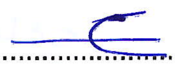
نعوض (*): $x = (y-1)^2 - 2(y-1)$

$x = y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 = y^2 - 4y + 4 - 1$

$x = (y-2)^2 - 1 \Rightarrow x+1 = (y-2)^2$

* المعادلة التي يكون فيها معادلة من الدرجة الأولى والدرجة الثانية يرسم قطع مكافئ.
التي يكون أسه (1) يكون هو المحور (المحور التناظر)



 $\leftarrow$ $x = y^2$

* معادلة قطع مكافئ ذروته: $(-1,2)$ محوره يوازي المحور (ox).

[أنا خذ المحور الذي درجته درجة أولى وفي المعادلة المعطاة الـ x
هي من الدرجة الأولى لذلك محوره يوازي المحور (ox)]

مثال: أوجد المستقر الفعلي لكل من التوابع الشعاعية الآتية:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

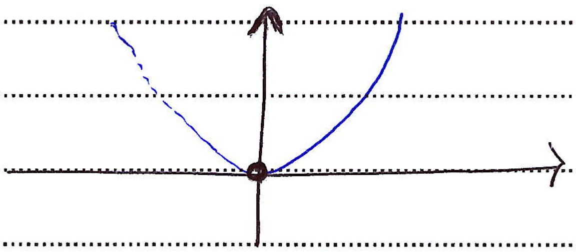
$$\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^{2t} \vec{j}$$

التابع الأسي معرف على $\mathbb{R}$

$$x = e^t > 0 \qquad y = e^{2t} > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

فنلاحظ أن $y = x^2$

فالمستقر الفعلي للتابع الشعاعي هو الجزء الواقع في الربع الأول من القطع المكافئ الذي ذروته $O(0,0)$ ومحوره oy عدا ذروته



ملاحظة: O الثقب لأننا بدأنا رسم بعد المبدأ وليس من المبدأ.

مثال: أوجد المستقر الفعلي للتابع الشعاعي $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = \left(\sin t, \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\right)$$

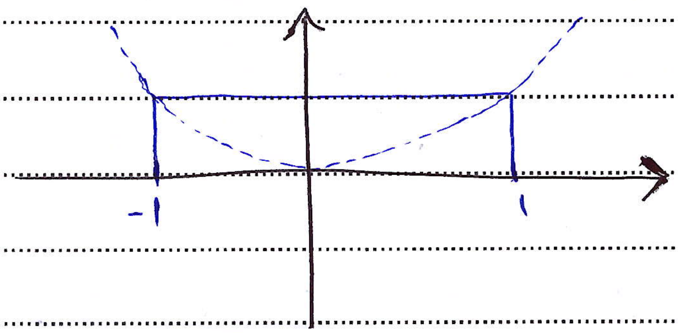
$$x = \sin t \qquad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t = \sin^2 t$$

$$-1 \le \sin t \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1$$

$$y = x^2$$

المستقر الفعلي هو قوس من القطع المكافئ الذي ذروته $O(0,0)$ و

محوره oy هذا القوس AOB حيث $A(-1,1)$, $B(1,1)$



مثال: أوجد المستقر الفعلي لكل من التوابع الآتية:

$$\vec{r} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(u,v) = (u-v,\ 2v-3u,\ 2u-v+1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = u - v & (1) \\ y = 2v - 3u & (2) \\ z = 2u - v + 1 & (3) \end{array}\right\} \Rightarrow z - x = u + 1$$

$$u = z - x - 1 \quad \ldots (1)$$

$$v = u - x = z - x - 1 - x = z - 2x - 1$$

$$v = z - 2x - 1 \quad \ldots (2)$$

نعوض (1) و (2)

$$y = 2z - 4x - 2 - 3z + 3x + 3$$

$$\Rightarrow y = -x - z + 1 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$$

معادلة مستوي

مثال: أوجد المستقر الفعلي للتابع الشعاعي : $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}(u, v) = (a\cos u \cos v,\ a\cos u \sin v,\ a\sin u)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u \cos v \\ y &= a\cos u \cdot \sin v \\ z &= a\sin u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= a^2\cos^2 u \cdot \cos^2 v \\ y^2 &= a^2\cos^2 u \cdot \sin^2 v \\ z^2 &= a^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 u\,(\underbrace{\cos^2 v + \sin^2 v}_{=1}) = a^2\cos^2 u$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2(\underbrace{\sin^2 u + \cos^2 u}_{1=}) = a^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

معادلة كرة مركزها $(0,0,0)$ نصف قطرها a.

مثال: لنعين التابع الشعاعي: $\vec{r}(t) = \left(\dfrac{\sin t}{t},\ \dfrac{2t-1}{3t+6},\ e^{-t}\right)$

$x = \dfrac{\sin t}{t}$, $W_1 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$y = \dfrac{2t-1}{3t+6}$ $W_2 = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$z = e^{-t}$ $W_3 = \mathbb{R}$

$W = w_1 \cap w_2 \cap w_3 = (\mathbb{R}\{0\}) \cap (\mathbb{R}\{-2\}) \cap (\mathbb{R})$

$\Rightarrow W = \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$

$\lim\limits_{t \to 0} \vec{r}(t) = \left(\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} , \lim\limits_{t \to 0} \frac{2t-1}{3t+6} , \lim\limits_{t \to 0} e^{-t} \right)$

$= \left(1 , \frac{-1}{6} , 1 \right)$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = \left(0 , \frac{2}{3} , 0 \right)$

مثال احسب النهايات:

$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t^2} , 1 + e^{2t} , 1 + e^{t^2-2} \right)$

$x = \frac{1}{t^2} \longrightarrow w_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = 1 + e^{2t} \longrightarrow w_2 = \mathbb{R}$

$z = 1 + e^{t^2-2} \longrightarrow w_3 = \mathbb{R}$

$W = w_1 \cap w_2 \cap w_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{r}(t) = (0 , +\infty , +\infty)$, $\lim\limits_{t \to 0} \vec{r}(t) = (+\infty , 2 , 1 + e^{-2})$

$\vec{r}(t) = (2t, \sqrt{4-t^2})$

$x = 2t \qquad w_1 = \mathbb{R}$

$y = \sqrt{4-t^2} \qquad w_2 = [-2, 2]$

$w = w_1 \cap w_2 = [-2, 2]$

$\lim_{t \to 0} \vec{r}(t) = (0, 2)$

$\lim_{t \to 2} \vec{r}(t) = (4, 0)$

مثال: أوجد مشتق كل من التوابع الشعاعية:

$\vec{r}(t) = (\ln(2t^2 - t), 2e^{3t}, t)$

$\vec{r}'(t) = \left(\frac{4t-1}{2t^2-t}, 6e^{3t}, 1\right)$

$\vec{r}(t) = (\sqrt{t+1}, 2^t, \cos t)$

$\vec{r}'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t+1}}, 2^t \ln(2), -\sin t\right)$