كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : الثامنة /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية:

D $x^2 y^{(4)} = x$

الحل: المعادلة تكتب بالشكل:

$$y^{(4)} = \frac{1}{x} \Rightarrow y''' = \ln x + c_1$$

$$y'' = x(\ln x - 1) + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^2}{2} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

ويكون الحل العام:

$$y = \left(\frac{x^3}{6}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) - \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4\right)$$

شرح:

$$\int \ln x$$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$u.v - \int v\, du$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$x \ln x - \int 1 \, dx$

$x \ln x - x + C = x(\ln x - 1)$

$\star \int x(\ln x - 1) \, dx$

$\int x \underbrace{\ln x}_{\text{بالتجزئة}} \, dx - \int x \, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x \, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$u \cdot v - \int v \, du$

$\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$

$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$

$\int \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) =$

$= \frac{1}{2} \int x^2 \ln x \, dx - \frac{1}{4} \int x^2 \, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2 dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^2}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^2}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12}$$

2) $x y'' = y' + x \sin\frac{y'}{x}$

الحل: المعادلة مثالية من التابع y

نفرض $y' = z \Rightarrow y'' = z'$

بالتعويض نجد:

$$x z' = z + x \sin\frac{z}{x}$$

نقسم على x:

$$\Rightarrow z' = \frac{z}{x} + \sin\frac{z}{x} \quad \dots (\star)$$

وهي معادلة متجانسة لحل نفرض:

$$\frac{z}{x} = u \Rightarrow z = u \cdot x \Rightarrow z' = xu' + u$$

بالتعويض في $\star$ نجد:

$$xu' = \sin u \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\ln\left|\tan\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln c_1$$

$$\tan\frac{u}{2} = c_1 x \Rightarrow u = 2\tan^{-1}(c_1 x)$$

(نضرب بـ x لأنه لدينا $z = u \cdot x$)

$$z = 2x\tan^{-1}(c_1 x)$$

$$y' = 2x\tan^{-1}(c_1 x)$$

بالكاملة نجد بالكل العام:

$$y = \int 2x\tan^{-1}(c_1 x)\,dx + c_2$$

نكامل بالتجزئة:

$$u = \tan^{-1}(c_1 x) \Rightarrow du = \frac{c_1}{1+c_1^2x^2}\,dx$$

$$dv = 2x\,dx \Rightarrow v = x^2$$

$$\Rightarrow x^2\tan^{-1}(c_1 x) - \int \frac{x^2 c_1}{1+c_1^2x^2}\,dx$$

$$= x^2\tan^{-1}(c_1 x) - c_1\int 1 - \frac{c_1^2x^2}{1+c_1^2x^2}\,dx$$

$$= x^2\tan^{-1}(c_1 x) - c_1 x + c_1^2\tan^{-1}(c_1 x)$$

ومنه:

$$y = x^2\tan^{-1}(c_1 x) - c_1 x + c_1^2\tan^{-1}(c_1 x) + c_2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\frac{d(\tan^{-1})}{dx} = \frac{1}{1+z^2}$$ الشرح:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+(c_1x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(c_1x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{c_1}{1+c_1^2x^2} \Rightarrow du = \frac{c_1}{1+c_1^2x^2}\,dx$$

3) $x^2 y''' = y''^2$

المعادلة خالية من التابع ومشتقته الأول:

$$y'' = Z \Rightarrow y''' = Z'$$

بالتعويض نجد:

$$x^2Z' = Z^2 \Rightarrow \frac{dZ}{Z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

بالمكاملة:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x} + c_1$$

توحيد مقامات:

$$\frac{c_1x+1}{x}$$ نقلب $\Rightarrow Z = \frac{x}{c_1x+1}$

بالتعويض نجد:

$$y'' = \frac{x}{c_1x+1} = \frac{1}{c_1}\left(1 - \frac{1}{c_1x+1}\right)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$y' = \frac{1}{c_1}\left[x - \frac{1}{c_1}\ln(c_1x+1)\right] + c_2$$

بالمكاملة مرة ثانية نجد:

$$y = \frac{1}{c_1}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{c_1^2}(c_1x+1)\ln[c_1x+1] - 1\right] + c_2x + c_3$$

④ $yy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{y^2} = 0$

المعادلة خالية من المتحول المستقل:

$$y' = Z \Rightarrow y'' = Z'$$

بالتعويض نجد:

$$yZZ' + \frac{1}{2}Z^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow 2ZZ' + \frac{1}{y}Z^2 = \frac{-2}{y^3}$$

وهي معادلة برنولي نفرض:

$$Z^2 = u \Rightarrow 2ZZ' = u'$$

بالتعويض نجد:

$$u' + \frac{1}{y}u = \frac{-2}{y^3}$$

وهي معادلة خطية حل:

$$M = e^{\int \frac{1}{x}dy} = y$$

$$My = \int \frac{-2}{y^2}dy + c_1 = \frac{2}{y} + c_1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$u = \frac{c_1 y + 2}{y^2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{c_1 y + 2}}{y}$$

بالتعويض في:

$$\frac{y}{\sqrt{c_1 y + 2}}\, dy = dx$$

$$\frac{c_1 y + 2 - 2}{\sqrt{c_1 y + 2}}\, dy = c_1\, dx$$

بالمكاملة في:

$$\frac{2}{3c_1}(c_1 y + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{u}{c_1}(c_1 y + 2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{c_1 y + 2 - 2}{\sqrt{c_1 y + 2}}\, dy$$

نفرض أن:

$$u = c_1 y + 2 \Rightarrow dy = \frac{du}{c_1}$$

التكامل يصبح:

$$\int \frac{u - 2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{c_1}$$

$$\frac{1}{c_1}\int \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\frac{1}{c_1}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{c_1}\left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 4u^{\frac{1}{2}} + c_1\right]$$

إرجاع المتغير u إلى y:

$$\frac{1}{c_1}\left[\frac{2}{3}(c_1 y+2)^{\frac{3}{2}} - 4(c_1 y+2)^{\frac{1}{2}} + c_1\right.$$

$$= \frac{2}{3c_1}(c_1 y+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{c_1}(c_1 y+2)^{\frac{1}{2}}$$

5) $x y y'' = x y'^2 (1-x) - y y'$

الحل: معادلة متجانسة بالنسبة للتابع وجميعاته نفرض:

$$\frac{y'}{y} = z \Rightarrow \frac{y''}{y} = z' + z^2$$

نعوض في المعادلة بعد القسيم على y^2 نجد:

$$x(z' + z^2) = x z^2 (1-x) - z$$

نرتب المعادلة:

$$x z' + z = -x^2 z^2 \Rightarrow z' + \frac{1}{x} z = -x z^2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة برنولي نقسم $z^2 \neq 0$

$$z^{-2} z' + \frac{1}{x} z = -x$$

نفرض: $z^{-1} = u \Rightarrow -z^{-2} z' = u'$

نعوض في المعادلة كما يلي:

$$u' - \frac{1}{x} u = x$$

معادلة خطية حلها:

$$M = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} u = \int dx + c_1 = x + c_1$$

$$\Rightarrow u = x(x + c_1)$$

$$z = \frac{1}{x(x+c_1)} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x(x+c_1)}$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+c_1}\right)$$

$$\ln y = \frac{1}{c_1}\left[\ln x - \ln(x + c_1)\right] + \ln c_2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الشرح:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+c_1} \quad \cdots (\star)$$

$$1 = A(x+c_1) + Bx$$

$$1 = Ax + Ac_1 + Bx$$

$$1 = \underset{0}{x}(A+B) + \underset{1}{Ac_1}$$

$$A+B=0$$

$$Ac=1 \Rightarrow A = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{c}$$

نعوض في $(\star)$:

$$\frac{\frac{1}{c}}{x} - \frac{\frac{1}{c}}{x+c_1}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

2) $y'' + 9y = 0$

$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -9$

$\lambda = \pm 3i$

شرح: جذرين عقديين

$\lambda = \alpha + i\beta$

* غير موجودة

الحلين الخاصين $\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$

الحل العام

$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

$\lambda = \pm 3i$

الحلين الخاصين:

$y_1 = \cos 3x$

$y_2 = \sin 3x$

الحل العام:

$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

أوجد الحل العام لكل من المعادلة التفاضلية :

D $y'' - 4y' - 5y = 0$

المعادلة المميزة :

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$$
$$\lambda = -1 \qquad \lambda = 5$$

الحلين الخاصين :

$$y_1 = e^{-x} \quad / \quad y_2 = e^{5x}$$

الحل العام :

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x}$$

جذرين حاصين :

$$\lambda_1 = \alpha \quad / \quad \lambda_2 = \beta$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \quad / \quad y_2 = e^{\beta x}$$

أما العام :

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

③ $y'' - 2y' + 10y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4 - 40 = -36$

$\pm\sqrt{\Delta} = \pm 6$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$

الحلين الخاصين :

$y_1 = e^x \cos 3x$

$y_2 = e^x \sin 3x$

الحل العام :

$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

④ $y'' + 10y' + 25y = 0$

المعادلة المميزة :

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$

$(\lambda + 5)(\lambda + 5) = 0$

$\lambda = -5 \quad | \lambda = -5$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحلين الخاصين:

$y_1 = e^{-5x}$ | $y_2 = x e^{-5x}$

الحل العام:

$y = (c_1 + c_2 x) e^{-5x}$

جذرين حقيقين متساويين:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$

$y_1 = e^{\alpha x}$

$y_2 = x e^{\alpha x}$

الحل العام:

$y = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z