كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : السادسة /عملي/

1) $x^2 y'^2 + x y y' - 6y^2 = 0$

نوجب المميز:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = x^2y^2 + 24x^2y^2 = 25x^2y^2$

$\sqrt{\Delta} = 5xy$

$y' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-xy + 5xy}{2x^2} = \frac{2y}{x}$

$\frac{dy}{y} - 2\frac{dx}{x} = 0$

$\ln y - 2\ln x = \ln c \Rightarrow \ln y - \ln x^2 = \ln c$

$\ln \frac{y}{x^2} = \ln c \Rightarrow \boxed{x^{-2}y - c = 0}$

$y' = \frac{-xy - 5xy}{2x^2} = \frac{-3y}{x}$

$\frac{dy}{y} + \frac{3dx}{x} = 0$

$y = xy' - y'^3$

$y' = c$

$y = xc - c^3$

$$\ln y + 3\ln x = \ln c \Rightarrow \ln y + \ln x^3 = \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{x^3 Y - c = 0}$$

$$(x^{-2} Y - c)(x^3 Y - c) = 0$$

$$y = y' + \frac{e^x}{y'}$$

2)

$$Y = (x, Y')$$

نفرض $Y' = Z$

$$Y = f(x, Z)$$

نشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$Z = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{dx}$$

المعادلة محلولة بالنسبة لـ Y:

نفرض $Y = Z$

$$Y = Z + \frac{e^x}{Z}$$

$$Y' = Z = \frac{e^x}{z} + \left(1 - \frac{e^x}{Z^2}\right)\frac{dZ}{dx}$$

$$Z = \frac{e^x}{z} + Z' - \frac{Z' e^x}{Z^2}$$

$$Z - \frac{e^x}{z} = \left(1 - \frac{e^x}{Z^2}\right) Z'$$

$$Z\left(1 - \frac{e^x}{Z^2}\right) = \left(1 - \frac{e^x}{Z^2}\right) Z'$$

$$Z = Z'$$

$$Z = \frac{dZ}{dx} \Rightarrow Z\,dx = dZ$$

$$dx = \frac{dZ}{Z} \Rightarrow \ln Z = x + c$$

$$\ln Z = \ln e^{x} + \ln c \Rightarrow \ln Z = \ln e^{x} c$$

$$\boxed{Z = c e^{x}}$$

$$Y = Z + \frac{e^{x}}{Z} \quad , \quad Z = ce^{x}$$

$$\Rightarrow Y = ce^{x} + \frac{1}{c}$$

3-) $9YY'^2 - 2xY' + Y = 0$

المحلولة بالنسبة لـ x

$x = f(y, y')$

نفرض $Y' = Z$

نعوض في المعادلة

$x = f(y, Z)$

نشتق بالنسبة لـ y

$$\frac{1}{Z} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{dZ}{dy}$$

المعادلة تكتب :

$$x = \frac{9YY'^2 + Y}{2Y'}$$

محلولة بالنسبة لـ x :

نفرض $Y' = Z$

$$x = \frac{9YZ^2 + Y}{2Z}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}Z + \frac{1}{2Z} + \left(\frac{9}{2}Y - \frac{Y}{2Z^2}\right)\frac{dZ}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2Z} - \frac{9}{2}Z = \frac{Y}{Z}\left(\frac{9}{2}Z - \frac{1}{2Z}\right)\frac{dZ}{dy}$$

بالتقسيم على $\frac{9}{2}Z - \frac{1}{2Z} \neq 0$

$$\frac{dZ}{Z} = -\frac{dY}{Y} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{c}{y}}$$

الحل الوسيطي يعطى بالعلاقتين:

$$x = \frac{9YZ^2 + Y}{2Z} \quad , \quad Z = \frac{c}{Y}$$

الديكارتية:

$$x = \frac{9Y\frac{c^2}{y^2} + y}{2\frac{c}{y}}$$

4- $YY' = 2xY'^2 + 1$

معادلة لاغرانج تكتب بالشكل

$$Y = 2xY' + \frac{1}{Y'}$$

نفرض $Z = Y'$ نعوض فنجد:

$$Y = 2xZ + \frac{1}{Z}$$

نشتق بالنسبة لـ x نجد:

$$Z = \frac{dy}{dx} = 2Z + \left(2x - \frac{1}{Z^2}\right)\frac{dZ}{dx}$$

$$x' + \frac{2}{Z}x = \frac{1}{Z^2}$$

$$M = e^{\int p(Z)dZ}$$

$$= e^{\int \frac{2}{Z}dZ} = e^{2\ln Z} = Z^2$$

$$Mx = \int M q(\cancel{Z})\, dZ + C$$

$$Z^2 x = \int \frac{1}{Z} dZ + C = \ln Z + C$$

$$Y = 2xZ - \ln(Z)\ Z^2 = Z + C$$