كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : معادلات تفاضلية

المحاضرة : السادسة /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

المعادلات المحلولة بالنسبة لـ y :

هنا تتحول المعادلة

$$f(x, y, y') = 0 \quad \dots(1)$$

تتحول الى الشكل:

$$y = f(x, y')$$

نفرض $y' = Z$ <= $y = f(x, Z) \quad \dots(2)$

بالاشتقاق نجد:

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} Z'$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} Z'$$

وهي معادلة محلولة بالنسبة للمشتق نبحث عن حلول لها حسب ما سبق حلها $f(x, Z', c) = 0 \quad \dots(3)$

(2) و (3) يسمى حل وسيطي.

مثال: $xy'^2 + 2xy' - y = 0$

حل المعادلة

$y = + x y'^2 + 2xy'$

نفرض $y' = Z \Leftarrow$

$y = xZ^2 + 2xZ \quad \dots(4)$

نشتق (4) لنجد:

$y' = Z^2 + 2Z + [2xZ + 2x]Z'$

ولكن $y' = Z$

$Z = Z^2 + 2Z + 2x[Z+1]Z'$

$-Z - Z^2 = 2x[1+Z]Z'$

$-Z(1+Z) = 2x(1+Z)Z'$

نقسم على $Z+1 \neq 0$

$-Z = 2xZ'$

$2x\frac{dZ}{dx} = -Z \Rightarrow 2x\,dZ + Z\,dx = 0$

بالقسمة على $x . Z \neq 0$

$$\frac{dx}{x} + 2\frac{dZ}{Z} = 0$$

$$\ln x + 2 \ln Z = c$$

$$\ln(x \times Z^2) = c_1$$

$$x \times Z^2 = c_1 \quad \dots (5)$$

$(5) + (4)$ هو الحل الوسيطي.

معادلة لاغرانج: تصنف من صنف المعادلات المحلولة بالنسبة للتابع y:

شكله العام:

$$y = x f(y') + g(y') \quad \dots (6)$$

نفرض $y' = Z$

$$y = x f(Z) + g(Z) \quad \dots (7)$$

نشتق (7):

$$y' = f(Z) + [x f(Z) + g(Z)] Z'$$

$$\Rightarrow Z = f(Z) + [x f'(Z) + g'(Z)] Z'$$

بالقسمة على $Z \neq 0$

$$[Z - f(Z)]\, x' = x f'(Z) + q'(Z)$$

$$[Z - f(Z)]\, x' - x f'(Z) = q'(Z)$$

$$\frac{x' - f'(Z)}{Z + f(Z)}\, x = \frac{q'(Z)}{Z - f(Z)}$$

وهي معادلة خطية التابع x المتحول Z

* معادلة لاغرانج تقود إلى محلولة بالمشتق وحصراً خطية حيث التابع x والمتحول Z.

مثال: $y = 2xy' - y'^2$

أوجد الحل

نلاحظ أنها معادلة محلولة بالنسبة لـ y وهي أيضاً معادلة لاغرانج

نفرض $y' = Z$

$$\Rightarrow y = 2xZ - Z^2 \quad \dots (8)$$

نشتق (8):

$$y' = 2Z + (2x - 2Z)Z'$$

$$Z = 2Z + 2(x - Z)Z'$$

$$-Z = 2(x - Z)Z'$$

نقسم على $Z' \neq 0$

$$-Zx' = 2x - 2Z$$

$$-Zx' - 2x = -2Z$$

$$x' + \frac{2}{Z}x = 2$$

خطية مرتبة أولى غير متجانسة حلها

$$x = e^{-\int \frac{2}{Z}dZ} + e^{-\int \frac{2}{Z}dZ}$$

$$\int e^{\int \frac{2}{Z}dZ}\, 2\, dZ$$

$$x = \frac{c}{Z^2} + \frac{2}{Z^2}\int Z^2\, dZ$$

$$\boxed{x = \frac{c}{Z^2} + \frac{2}{3}Z} \quad \ldots(9)$$

(8) و (9) هو الحل الوسيطي

معادلة كليرو: هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج

الشكل العام:

$$y = xy' + g(y') \quad \ldots(10)$$

نفرض $y' = Z$

$$y = xZ + g(Z) \quad \ldots(11)$$

نشتق:

$$y' = Z + [Z + g'(Z)]\, Z'$$

$$Z = Z + [x + g'(Z)]\, Z'$$

$$\Rightarrow [x + g'(Z)] \cdot Z' = 0$$

$$Z' = 0 \Rightarrow Z = c$$

نعوض في (11)

$$y = cx + g(c)$$

مثال توضيحي عن الزمرة:

$$\boxed{y\,dx + x\,dy}$$

زمرة

تكامل لـ x

yx

اشتقاق x واشتقاق y