كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي ١

المحاضرة : الاولى/**عملي**/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Z مكتبة

السؤال الأول :

ادرس اطراد كل من المتتاليات :

① $\left(u_n = \frac{n}{n+1}\right)_{n\geq 1}$

باستخدام التابع المقابل

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

التابع متزايد فالمتتالية متزايدة تماماً

② $\left(w_n = \frac{2^n}{n!}\right)_{n\geq 1}$

$$w_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2 \times \cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!} \times \cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \leq 1$$

← المتتالية متناقصة

3) $v_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n \geq 1}$

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

التابع متناقص ⇐ المتتالية متناقصة تماماً.

4) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \end{cases}$

$x_1 = 1$

$x_2 = \sqrt{3}$ $+$

$x_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

ندرس تزايد المتتالية بالتدريج:

$x_{n+1} > x_n$

(1) نثبت صحة العلاقة من أجل $n=1$

$x_2 \overset{?}{>} x_1$

$x_1 = 1$

$x_2 = \sqrt{3} \simeq 1.7$

$x_2 > x_1$

العلاقة محققة

(2) نفرض صحة العلاقة من أجل n

$x_{n+1} > x_n$

③ نثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$x_{n+2} \overset{?}{>} x_{n+1}$$

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$$

التابع متزايد

نطبق التابع f على العلاقة (علاقة الفرض)

$$f(x_{n+1}) > f(x_n)$$

$$x_{n+2} > x_{n+1}$$

العلاقة محققة

⇐ المتتالية متزايدة تماماً

ملاحظة:

حالات عدم التعيين:

$$\frac{0}{0} \text{ و } \frac{\infty}{\infty} \text{ و } 0 \cdot \infty \text{ و } \infty - \infty \text{ و } 1^{\infty} \text{ و } \infty^{0} \text{ و } 0^{0}$$

ملاحظة:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad ; \quad a > 0$$

السؤال الثاني :

أوجد نهاية كل من المتتاليات :

① $u_n = \frac{3n+4}{5-5n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

② $(u_n = 3^n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$

لأن متتالية هندسية أساسها $q = 3 > 1$ فهي متباعدة إلى $+\infty$

③ $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $-1 < \frac{1}{2} = q < 1$ فهي متقاربة إلى الصفر

السؤال الثالث :

$Sup([a, b[) = b$

$Sup(]a, b[) = b$

$inf([a, b[) = a$

$inf(]a, b[) = a$

السؤال الرابع :

$A = \{x ; x \in Q , 0 < x < \sqrt{3}\}$

$\min(A) = 0$

$\max(A) =$ لا يمكن تعيينه

$\inf(A) = 0$

$\sup(A) = \sqrt{3}$

السؤال الخامس: ★ $A = \{x , 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

عين الحد الأعلى الأصغري

والحد الأدنى الأعظمي

$3x^2 - 10x + 3 < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 100 - 4(3(3))$

$= 100 - 36 = 64$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8 > 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		3	$+\infty$
المعادلة	$+$	0	$-$	0	$+$
المتراجحة	غير محققة		محققة		غير محققة

$A =]\frac{1}{3}, 3[$

$\sup(A) = 3$

$\inf(A) = \frac{1}{3}$

وظيفة:

عين sup, inf

$$A = \left\{ x \; ; \; \frac{x-2}{x+1} \geq 3 \right\}$$

هام

السؤال السادس:

ادرس نهاية المتتالية باستخدام مفهوم كوشي للتقارب

① $$u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$$

علماً أن

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{-4}{5}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_{0\varepsilon} \in \mathbb{N} \; ; \; |u_n - l| < \varepsilon$$

$$\forall n > n_{0\varepsilon}$$

$$|u_n - l| = \left| \frac{4n-3}{6-5n} - \left(-\frac{4}{5}\right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n-3}{6-5n} + \frac{4}{5} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{20n} - 15 + 24 - \cancel{20n}}{5(6-5n)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{9}{5(6-5n)} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{9}{30-25n} \right| < \varepsilon$$

n	$-\infty$	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
معادلة	+	0	−

$$\frac{9}{-(30-25n)} < \varepsilon$$

$$\frac{9}{25n-30} < \varepsilon$$

$$9 < 25\varepsilon n - 30\varepsilon$$

$$9 + 30\varepsilon < 25\varepsilon n$$

$$n > \frac{9+30\varepsilon}{25\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\frac{9+30\varepsilon}{25\varepsilon}\right]$$

العدد الطبيعي الأكبر من العدد المعطى مباشرة

تم تعيين n_0 والشرط محقق .

وظيفة :

ادرس نهاية المتتالية باستخدام مفهوم كوشي للتقارب

علماً أن $U_n = \frac{n+1}{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$$