كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **الخامسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المتسلسلات العكسية والمتسلسلة المتناوبة:

تعريف:

نقول عن المتسلسلة أنها ذات حدود عكسية (مختلطة) إذا وجد فيها حدود موجبة وأخرى سالبة.

مبرهنة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة بالإطلاق (أي أن $\sum |u_n|$ متقاربة) فإن $\sum u_n$ متقاربة.

* إن عكس هذه المبرهنة ليس صحيحاً بالضرورة.

تعريف:

إذا كانت $\sum u_n$ متقاربة وكانت $\sum |u_n|$ غير متقاربة فإننا نقول أن المتسلسلة $\sum u_n$ متقاربة شرطاً.

ملاحظة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum u_n$ حدودها السبت جميعها موجبة عندئذ باستخدام اختبار الجذر الثوني (كوشي) والاختبار نبحث المتسلسلة بالقيمة المطلقة أي:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = k$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$$

المتسلسلات المتناوبة :

نقول عن المتسلسلة العددية $\sum u_n$ إنها متناوبة إذا أمكن كتابتها بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$$

«كل صورين متتاليين لهما إشارتين مختلفتين»

مبرهنة ليبنز :

تكون المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ متقاربة إذا كان

* u_n متناقصة
* $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$

مثال : ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

الحل :

* لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$u_n = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

أي المتتالية $(u_n = \frac{1}{n})$ متناقصة

* $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow$ حسب مبرهنة ليبنز تكون المتسلسلة متقاربة.

* بينما متسلسلة القيمة المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

متباعدة (حسب ريمان) ∴ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة شرطاً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة

$$① \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$$

ندرس متسلسلة القيمة المطلقة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$$

حسب اختبار الجذر النهائي (كوشي)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

⇐ متسلسلة القيمة المطلقة متقاربة إذاً المتسلسلة المفروضة متقاربة بالإطلاق فهي متقاربة.

$$② \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^3}}$$

ندرس متسلسلة القيمة المطلقة

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

⇐ متسلسلة ريمان لدينا $\alpha = \frac{5}{2} > 1$ ⇐ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n\sqrt{n^3}}$ متقاربة

فالمتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^3}}$

متقاربة أيضاً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التوابع الحقيقية :

التوابع الحقيقية : هي علاقة تربط بين مجموعتان جزئيتان X و Y من R بحيث أنه من أجل أي عنصر $x \in X$ يوجد عنصر واحد $y \in Y$ بحيث يحقق $y = f(x)$

* X منطلق التابع
* Y مستقر التابع
* مجموعة القيم

$$Y_0 = \{ y \in Y : y = f(x) \ ; \ x \in X \}$$

التابع الصريح والتابع الضمني :

* نقول عن التابع أنه صريح إذا كان محلول بالنسبة لأحد متحولاته
* التابع الضمني لا يمكن حله بالنسبة لأي من متحولاته بشكل وحيد

مثال ① :

① $y + 2x - 1 = 0$

$\Leftarrow$ $y = -2x + 1$ تابع صريح

② $3xy + x^2 - y^2 = 0$

$\Leftarrow$ تابع ضمني $\begin{cases} \text{غير محلول بالنسبة لـ } x \\ \text{وغير محلول بالنسبة لـ } y \end{cases}$

التطبيق :

نقول عن التابع أنه تطبيق إذا كانت مجموعة المستقر Y مساوية لمجموعة القيم Y_0

التطبيق المطابقة : نقول عن التطبيق أنه مطابقة إذا كانت مجموعة تعريفه (المنطلق) مساوية لمجموعة جيمه و

$$f(x) = x \quad ; \quad \forall x \in X$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التطبيق الثابت:

نقول عن f المعرف على X أنه تابع ثابت إذا كانت مجموعة قيمه تتألف من عنصر واحد c ويحقق الشرط

$$f(x) = c \quad ; \quad \forall x \in X$$

التوابع المتساوية:

نقول عن التابعين f و g أنهما متساويان إذا وفقط كان لهما مجموعة التعريف X نفسها وكان من أجل كل $x \in X$ فإن $f(x) = g(x)$ ونكتب

$$f = g$$

التابع المتباين:

نقول عن التابع f أنه متباين إذا تحقق أحد الشرطين

① $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

② $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

مثال: التابع

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = 3x - 2$$

تابع متباين لأن

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال: التابع

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

تابع غير متباين لأن

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = \mp\sqrt{x_2^2}$

$x_1 \neq x_2$

التابع الغامر:

نقول عن التابع $f: X \to Y$ أنه غامر إذا كان كل عنصر $y \in Y$ صورة لعنصر واحد على الأقل من مجموعة المنطلق X

مثال: التابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 2x$

غير غامر وذلك لأنه على سبيل المثال من أجل $y = 3$ لا يوجد عنصر x من المنطلق X إذ يكون $3 = 2x$

المتقابل:

نقول عن التابع $f: X \to Y$ إنه تقابل إذا كان غامر ومتباين

مثال:

التابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = 2x - 3$

بين فيما إذا كان f تابع تقابل

الحل:

$f(x_1) = f(x_2)$ ★

$\Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ التابع f تابع متباين

★ نلاحظ مثلاً من أجل $y = 2 \in \mathbb{N}$ لا يوجد أي عنصر من المنطلق بحيث

$2 = 2x - 3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow f$ تابع غير غامر

ومنه f تابع ليس تابع تقابل.

مثال:

التابع $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x - 3$

f تابع متباين من المثال السابق

$* \; y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$

$$\forall y \in \mathbb{R} \; \exists x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ تابع غامر

ومنه f تابع متباين وغامر $\Rightarrow f$ تابع تقابل.

التابع الزوجي

نقول عن التابع f المعرف على $X \subseteq \mathbb{R}$ إنه زوجي إذا

حقق الشرطين:

① $\forall x \in X \; ; \; -x \in X$

② $f(-x) = f(x)$

* الخط البياني للتابع الزوجي متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

التابع الفردي:

نقول عن التابع f المعرف على $X \subseteq \mathbb{R}$ إنه فردي إذا حقق الشرطين

① $\forall x \in X \; ; \; -x \in X$

② $f(-x) = -f(x)$

* الخط البياني للتابع الفردي متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

التابع الدوري :

نقول عن التابع f المعرف على X إنه دوري إذا وجد عدد حقيقي $T \in \mathbb{R}^+$ وعدد صحيح $k \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

1) $(x + kT) \in X$, $x \in X$

2) $f(x + kT) = f(x)$

عندئذ يكون f تابع دوري ودوره T.

التابع العكسي :

إذا كان التابع معرف على المجموعة X ويأخذ قيمة في المجموعة Y تقابلاً فإنه يوجد تابع معرف على Y ويأخذ قيمة في X نسميه بالتابع العكسي ونرمز له بـ f^{-1}

* إن التابع $f^{-1} : Y \to X$ يدل على أن

$$\forall x \in X \wedge y \in Y : y = f(x)$$
$$(\Leftrightarrow) \quad x = f^{-1}(y)$$

ملاحظة :

* $\forall x \in X$ $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

* $\forall y \in Y$ $\quad f(f^{-1}(y)) = y$

منحنيا التابعين

$$y = f(x) \text{ و } x = f^{-1}(y)$$

متناظران بالنسبة للمستقيم $y = x$

ملاحظة :

سيكون التابع f تقابل محلي مجال من X عندئذ نقول إنه تقابلاً مجالياً وبالتالي التابع العكسي سيكون تابع معرف مجالياً.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

إذا كان التابع f تقابل معرف على I يمكن أن نوجد من المعادلة التابع العكسي f^{-1} بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x

فنكتب المعادلة $x = f^{-1}(y)$

أو بالصورة للترميز المألوف $y = f^{-1}(x)$

((أي نعوض y مكان x والعكس))

مثال:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ليس تابع تقابل

* $f : [0, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$

$$f(x) = x^2 - 1$$

تقابل

التابع العكسي هو

$$y = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 = y + 1 \Rightarrow x = \sqrt{y+1}$$

بالصورة للترميز المألوف فإن التابع العكسي يعطى بالعلاقة $y = \sqrt{x+1}$

تركيب التوابع:

* إذا كان لدينا التابعين f و g معرفين بالشكل

$$f : X \longrightarrow Y_0$$

$$g : Y \longrightarrow Z$$

إذا $y \in Y_0$ عندئذ التابع h المعرف بالشكل

$$h : X \longrightarrow Z$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$h(x) = g(f(x))$

نرمز لتركيب التابعين f و g ونرمز له بالشكل

$h = g \circ f$

مثال:

ليكن لدينا التابعين f و g

$f : [-1,1] \longrightarrow [0,1] = Y_0$

معرف بالعلاقة

$f(x) = 1 - x^2$

$g : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (X)

معرف بالعلاقة

$g(x) = \sqrt{x}$

هل يمكن تركيب التركيب:

بما أن $Y_0 = [0,1] \subseteq [0,\infty[= X$

عندئذ يمكن التركيب

$h(x) = (g \circ f)(x)$

$= g(f(x))$

$= g(1-x^2) = \sqrt{1-x^2}$

محدد ومقصور التابع:

نفرض لدينا التابع $f(x)$ المعرف على المجموعة $X \subset \mathbb{R}$ وإن $A \subset X$

فإذا كان $g(x)$ تابع معرف على A

وكانت

$\forall x \in A \qquad f(x) = g(x)$

عندئذ نقول إن g مقصور f على A

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ونكتب $g = f/A$ ويقرأ

نكتب f محدود على X

إطراد التابع:

تعريف:

نقول عن التابع f إنه متزايد تماماً (متزايد) إذا كان من أجل $x_1 > x_2$

فإن

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

تعريف:

نقول عن التابع f إنه متناقص تماماً (متناقص) إذا كان من أجل $x_1 > x_2$

فإن

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \leq f(x_2))$$

ملاحظة:

* إذا كان f و g تابعين متزايدين فإن $f+g$ تابع متزايد
* إذا كان f و g تابعين متناقصين فإن $f+g$ تابع متناقص
* $\lambda > 0$ و $f(x)$ متعاكسين بالإطراد $\Leftarrow$ $\lambda f(x)$ و $f(x)$ متعاكسين بالإطراد
* $\lambda < 0$ و $f(x)$ مختلفين بالإطراد $\Leftarrow$ $\lambda f(x)$ و $f(x)$ مختلفين بالإطراد
* f و g متعاكسين بالإطراد $\Leftarrow$ $g \circ f$ متزايد
* f و g مختلفين بالإطراد $\Leftarrow$ $g \circ f$ متناقص

تعريف:

* نقول عن التابع $f(x)$ إنه محدود من الأعلى على المجموعة X إذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون

$$\forall x \in X : f(x) \leq M$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

* ونقول إنه محدود من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي m بحيث

$$\forall x \in X : f(x) \geq m$$

* نقول عن $f(x)$ إنه محدود إذا كان محدوداً من الأدنى ومن الأعلى أي

$$m < f(x) < m \qquad \forall x \in X$$

* أيضاً يمكن القول إن f تابع محدود إذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون

$$\forall x \in X \mid f(x) \mid < k$$

أي

$$-k < f(x) < k$$

مثال 1

$f(x) = \cos x$ التابع محدود لأن $|\cos x| < 1$

مثال 2

$f(x) = 1 + x^2$ معرف على $\mathbb{R}$

غير محدود من الأعلى ولكنه محدود من الأدنى بالعدد 1

مثال 3

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

على المجال $]-\infty, 0[$

محدود من الأعلى بالعدد 0 غير محدود من الأدنى

مكتبة A to Z