كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : **الرابعة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٦

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

مثال: نعرف المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} \quad ; a \neq 0$$

الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية $\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1}$ هو

$$S = \frac{a(1-q)^n}{1-q}$$

نميز الحالات الآتية:

1) $|q| < 1$ عندئذ:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q)^n}{(1-q)} = \frac{a}{1-q}$$

a و q عددان محدودان إذاً المتسلسلة متقاربة ومجموعها

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

2) $|q| > 1 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$$

⇐ المتسلسلة متباعدة

3) $q=1$ ⇐

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.q^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a+a+\dots+a+\dots$$

⇐ $S_n = n.a$

وفيه $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \infty & ; a>0 \\ -\infty & ; a<0 \end{cases}$

4) $-1<q<1$ ⇐

$\lim_{n\to\infty} q^n$ غير موجودة

⇐ $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجودة

ملاحظة:

المتسلسلة الهندسية تتقارب فقط عندما يكون أساسها $|q|<1$ وتتباعد في جميع الحالات الأخرى

باقي المتسلسلة:

إذا كان لدينا المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + \dots + U_m + U_{m+1} + \dots + U_{m+n}$$

إذا حذفنا m حد في مجموع المتسلسلة تصرف $\sum_{n=m+1}^{\infty} U_n$

بما يسمى باقي المتسلسلة

أي أن حذف عدد منتهي في الحدود الأولى المتسلسلة يعرف باقي متسلسلة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

نظرية:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة فإن باقي المتسلسلة متقارب والعكس صحيح

أي إذا كانت باقي المتسلسلة متقاربة فإن المتسلسلة متقاربة

نتيجة:

إن حذف أو إضافة عدد منتهي من حدود أولى لمتسلسلة لا يؤثر في تقارب المتسلسلة

برهنة:

إن الشرط اللازم لتقارب متسلسلة عددية أن يسعى حدها العام إلى الصفر

مثال:

أدرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2 \neq 0$$

$\Leftarrow$ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^n}$$

غير متقاربة حسب الشرط اللازم للتقارب

ملاحظة:

عكس البرهنة غير صحيح بالضرورة أي إذا كان $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ليس بالضرورة أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

قد تكون المتسلسلة متقاربة أو متباعدة

$S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$

$S_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Leftarrow \quad S_n > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

أي S_n غير متقاربة $\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ غير متقاربة.

مبرهنة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة من S فإن المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n$

متقاربة من $c \cdot S$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة:

متسلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

① المتسلسلة متقاربة عندما $\alpha > 1$

② " " متباعدة عندما $\alpha \leq 1$

مثال:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}$

متسلسلة ريمان متباعدة لأن

$\alpha = \frac{1}{2} < 1$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$

متسلسلة ريمان متقاربة لأن

$\alpha = 2 > 1$

تقارب المتسلسلات العددية الموجبة:

تعريف

بفرض لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ذات الحدود الموجبة عندئذ نلاحظ أن متتالية المجاميع الجزئية متزايدة وبالتالي تكون المتسلسلة متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية محدودة.

من التعريف نحصل على البرهنة الآتية:

برهنة:

إذا كانت $\sum u_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة تكون متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية محدودة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة (اختبار المقارنة)

اذا كانت $\sum a_n$ و $\sum b_n$ متسلسلتان موجبتان

وكان $a_n \leq b_n$ من أجل $n > n_0$

- $\sum b_n$ متقاربة $\Rightarrow$ $\sum a_n$ متقاربة
- $\sum a_n$ متباعدة $\Rightarrow$ $\sum b_n$ متباعدة.

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{3^n}$$

$$0 \leq \sin^2 nx \leq 1$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3} + \frac{\sin^2 2x}{3^2} + \cdots + \frac{\sin^2 nx}{3^n} + \cdots$$

الحل:

نستخدم اختبار المقارنة مع المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

من الواضح لدينا

$$\frac{\sin^2 nx}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \forall n \geq 1$$

وبما أن المتسلسلة الهندسية متقاربة اذا كان $|q| < 1$ ولدينا

$$q = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ متقاربة بالتالي

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{3^n}$ متقاربة.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة (اختبار المقارنة):

إذا كانت لدينا السلسلتان الموجبتان $\sum u_n$ و $\sum v_n$ وكان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda$$

- $0 < \lambda < \infty \Rightarrow$

السلسلتان من طبيعة واحدة أي متقاربتان أو متباعدتان معاً

- $\lambda = 0 \Rightarrow$

تقارب المقام يؤدي لتقارب البسط وتباعد البسط يؤدي إلى تباعد المقام

- $\lambda = \infty \Rightarrow$

تقارب البسط يؤدي لتقارب المقام وتباعد المقام يؤدي لتباعد البسط

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n+1}$$

حسب اختبار المقارنة

ليكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة حسب ريمان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{3n+1} = 1 < \infty$$

$\Rightarrow$ السلسلتان من طبيعة واحدة

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n+1}$ متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة:

تدعى هذه المبرهنة باختبار النهاية لتقارب متسلسلتين

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

مبرهنة:

اذا كانت $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متسلسلتان موجبتان وتحققان

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

فإن المتسلسلتان من طبيعة واحدة

اختبار الجذر النوني (كوشي):

اذا كانت $\sum u_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة وكانت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$$

نميز الحالات الآتية:

1) اذا كانت $k<1$ ⇐ فإن المتسلسلة متباعدة
2) اذا كانت $k<1$ ⇐ " " متقاربة
3) اذا كانت $k=1$ ⇐ حالة شك لا يمكن الحكم على تقاربها أو تباعدها

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}$$

من الأنسب استخدام اختبار الجذر النوني

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^3 \cdot 3^n}} = \lim \frac{2^2}{(\sqrt[n]{n})^3 \times 3} = \frac{4}{1\times 3} = \frac{4}{3} > 1$$

⇐ المتسلسلة متباعدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$$

نستخدم اختبار الجذر النوني لكوشي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$$

⇐ المتسلسلة متقاربة.

اختبار النسبة (دالامبير):

اذا كانت $\sum u_n$ متسلسلة موجبة وكانت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$$

نميز الحالات الآتية:

1- $L > 1 \Rightarrow$ المتسلسلة متباعدة

2- $L < 1 \Rightarrow$ " " متقاربة

3- $L = 1 \Rightarrow$ حالة شك

مثال:

ادرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

الحل: نستخدم دالامبير

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = 0 < 1$

⇐ المتسلسلة متقاربة

اختبار رابب :

اذا كانت لدينا المتسلسلة $\sum u_n$ الحدية وكانت

$\lim [n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)] = R$

نميز الحالات التالية :

1- $R > 1$ ⇐ المتسلسلة متقاربة

2- $R < 1$ ⇐ " " متباعدة

3- $R = 1$ ⇐ حالة شك

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \times \frac{1}{2n+1}$

$3!! = 3\times1$ ، $7!! = 7\times5\times3\times1$ و

$5!! = 5\times3\times1$ و $10!! = 10\times8\times6\times4\times2$

نقسم داخلين

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\lim \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \times \frac{1}{2n+3}\right) \times \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!} \times (2n+1)\right)$

u_{n+1} ، $\frac{1}{u_n}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$= \lim \frac{(2n+1)}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n+3} = 1$$

$\Rightarrow$ حالة خاصة

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)!!$$

$$(2n+2)!! = (2n+2)(2n)!!$$

نستخدم اختبار آخر ولكن اختبار رابب

$$\lim_{n\to 0} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{6n+5}{(2n+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+4n+1} = \frac{6}{4} > 1$$

$\Rightarrow$ المتسلسلة متقاربة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة