كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : **الخامسة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المستقيم في الفراغ:

يعرف بـ:

نسمي مجموعة نقط الفراغ $M(x,y,z)$ المحققة بالعلاقة

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AM}$$

مستقيما في الفراغ محمولا على المنحى الثابت

$\overrightarrow{AM}$

نحصل على معادلة مستقيم إما بالشكل الديكارتي أو الوسيط أو مشترك طرفين.

تعيين معادلة مستقيم في الفراغ:

ليكن $M(x,y,z)$ نقطة ما في الفراغ ليكن $\vec{v}(a,b,c)$ شعاع

معلوم من المستقيم المار بـ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ويوازي $\vec{v}$

مجموعة النقط $M_1\overrightarrow{M} = t\vec{v}$

نسمي المعادلة المتجهة للمستقيم

بإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية

$$\left.\begin{array}{l} x-x_1 = ta \\ y-y_1 = tb \\ z-z_1 = tc \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

وهو الشكل الوسيطي لتمثيل المستقيم

ونسمي التمثيل الوسيطي لمعادلة مستقيم L.

بحذف الوسيط t نحصل على

$$t = \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

وهو الشكل الديكارتي لمعادلة مستقيم

ملاحظة:

في المعادلات السابقة إذا كان $\frac{m}{0}$ أو $\frac{0}{m}$ فهذا يكافئ $m=0$

مثال:

أوجد المعادلات الديكارتية والوسيطية للمستقيم L المار بـ $M(2,4,1)$ والموازي للمتجه $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

الحل:

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4-t \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1+3t \end{cases}$$

بحذف الوسيط نحصل على الشكل الديكارتي

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

(1) (2) (3)

يمكن الحصول على معادلة مستقيم بتعيينها كفصل مشترك لمستويين

بالمثال السابق من (1) و (2)

$$-x+2 = 2y-8$$

$$x-2y+10 = 0 \quad (4)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

من (1) و (3)

$$3y - 13 = -z + 1$$

$$3y + z - 13 = 0 \quad (5)$$

جملة المعادلتين (4) و (5)

تمثل معادلة مستقيم L

$$L: \begin{cases} -x - 2y + 10 = 0 \\ 3y + z - 13 = 0 \end{cases}$$

معادلة مستقيم يمر من نقطتين معلومتين:

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة في الفراغ على المستقيم L المار بـ

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

إذاً:

إن متجه المستقيم L هو $\overrightarrow{M_1M_2}$

وبالتالي ردت المسألة إلى الحالة الأولى

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

تمثيل وسيطي للمستقيم L

بحذف الوسيط t نحصل على التمثيل الديكارتي للمستقيم L

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

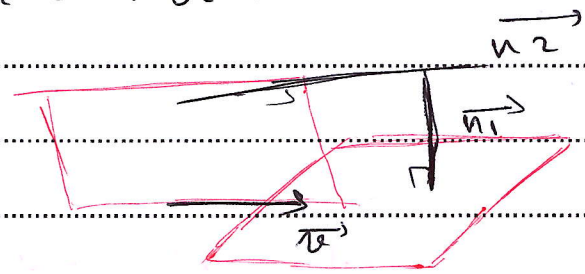
يمكن استنتاج النسبتين كفصل مشترك لمستويين من الشكل الديكارتي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة مستقيم كفصل مشترك لمستويين :

ليكن M نقطة واقعة على المستقيم L الممثل بالفصل المشترك للمستويين

$$L: \begin{cases} P_1 : p_1x_1 + q_1y_1 + r_1z_1 = 0 \\ P_2 : p_2x_2 + q_2y_2 + r_2z_2 = 0 \end{cases}$$



$$\vec{n_1} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{n_2} \cdot \vec{v} = 0$$

إحداثيات (x, y, z) تحقق معادلتي المستويين P_1 و P_2 لأن $M \in L$ أي $M \in P_1$ و $M \in P_2$

وبالعكس كل نقطة تحقق إحداثياتها P_1 و P_2 هي تنتمي للمستقيم L.

نحن المعادلتين السابقتين بالمعادلات العامة للمستقيم L

نفرض شعاع توجيه الفصل المشترك L هو $\vec{v}$

فيكون

$$\vec{v} \perp \vec{N_1} \quad , \quad \vec{v} \perp \vec{N_2}$$

إذاً :

$$\vec{v} = \vec{N_1} \wedge \vec{N_2}$$

بالتالي التمثيل الوسيطي بفرض أحد المجهولات هو الوسيط t

ثم نوجد بقية المجهولات بدلالة t

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

أوجد المعادلات الوسيطية والديكارتية للمستقيم المعرف:

$$L: \begin{cases} P_1: 3x+2y+4z-11=0 \\ P_2: 2x+y-3z-1=0 \end{cases}$$

الحل:

نفرض $z=t$

$$3x+2y=-4t+11$$

$$2x+y=3t+1$$

نضرب ② بـ -2 ونجمع

$$3x+2y=-4t+11$$

$$-4x-2y=-6t-2$$

بالجمع:

$$-x=-10t+9$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10t+9}$$

نعوض x في ②

$$20t-18+y=3t+1$$

$$\boxed{y=-17t+19}$$

$$\Rightarrow L: \begin{cases} x=10t-9 \\ y=-17t+19 \quad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

بحذف الوسيط t نحصل على التمثيل الديكارتي

$$t=\frac{x+9}{10}=\frac{y-19}{-17}=z$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

عين أحد اتجاهي جيب المستقيم المعين بالمعادلتين

$$L: \begin{cases} P_1: x-y+2z-1=0 \\ P_2: 3x+5y-4z+10=0 \end{cases}$$

الحل:

$$\vec{N} = (\vec{N_1} \wedge \vec{N_2}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = (-6, 10, 8)$$

أو

$$(-3, 5, 4)$$

الزاوية بين المستقيمين L_1 و L_2

الزاوية بين L_1 و L_2 هي الزاوية الكائنة بين شعاعي تجيههما أي بين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$

نفرض θ هي زاوية بين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ أي $\theta(\vec{v_1}, \vec{v_2})$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|}$$

أو

$$\sin\theta = \frac{|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}|}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|}$$

نتائج:

1- إذا كان $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$ المستقيمان متعامدان

2- إذا كان $\cos\theta = \pm 1$ أي أن $\theta = 0, \pi$

$\Leftarrow$ المستقيمان متوازيان.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

جد الزاوية الكائنة بين المستقيمين L_1 و L_2 المعرفين بالشكل:

$$L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

$$L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{+\sqrt{2}}$$

الحل:

$\vec{v_1}(1,-1,\sqrt{2})$

$\vec{v_2}(1,1,\sqrt{2})$

$|\vec{v_1}| = \sqrt{1+1+2} = 2$

$|\vec{v_2}| = \sqrt{1+1+2} = 2$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

زاوية مستقيم ومستوي في الفضاء:

ليكن P المستوي المحدد بالعلاقة

$$Px + qy + rz + d = 0$$

وليكن المستقيم L اتجاهه محدد بالعلاقة $\vec{v}(a,b,c)$

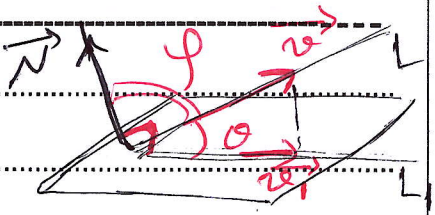
بالتعريف:

الزاوية بين المستقيم والمستوي هي الزاوية بين المستقيم L ومرسمه على المستوي P المستقيم L_1

عندئذ θ هي متممة الزاوية φ حيث φ هي الزاوية بين $\vec{N}$ و $\vec{v}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\varphi(\vec{N},\vec{v})$



$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{v}}{|\vec{N}|\cdot|\vec{v}|}$$

مثال:

حساب الزاوية بين المستقيم L

$$L: x+2 = y-3 = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$$

والمستوي P المعين بـ

$$P: x-y+\sqrt{2}z+5=0$$

الحل:

$$\vec{N}(1,-1,\sqrt{2})$$

$$\vec{v}(1,1,\sqrt{2})$$

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{\vec{N}\cdot\vec{v}}{|\vec{N}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1-1+2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

الأوضاع المختلفة لمستقيمين:

1) تعامد مستقيمين:

شرط التعامد لمستقيمين إذا كانا

أي أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

منطبقان عندما تنتمي إحدى النقاط من L_1 إلى L_2

نفرض بـ t حقيقة ما ونحصل على نقطة B نعوضها في L_2 عندئذ إذا كان $B \in L_2$ كان المستقيمان منطبقان

ج) متقاطعان مستقيمان إذا كانا غير متوازيان وواقعان في مستوٍ واحد

الشرط اللازم والكافي ليتقاطع L_1 و L_2

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = 0$$

حيث مختلط

حيث $M_1 \in L_1$

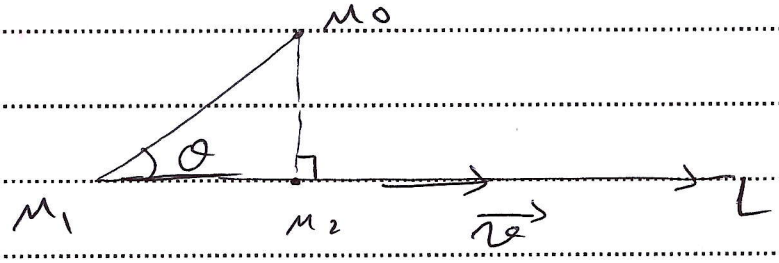
$M_2 \in L_2$

د) إذا كان $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \neq 0$

النتيجة غير واقعة في مستوٍ واحد بالتالي المستقيمان L_1 و L_2 متخالفان.

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم:

ليكن M_1 نقطة ما من المستقيم L متجهه $\vec{u}(a,b,c)$ ولتكن M_0 نقطة لا تنتمي إلى L عندئذ نرمز بـ D لبعد M_0 عن L وتتم حسابه بالشكل التالي:



$$\sin\theta = \frac{D}{|\overrightarrow{M_1M_0}|}$$

$$D = \sin\theta \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}|$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{v}|}{|\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow D = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{v}|}{|\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot |\vec{v}|} \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}|$$

$$\Rightarrow D = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

مثال: برهن

أثبت أن المسافة D بين $M_0(1,-1,2)$ والمستقيم L

$$L: \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$$

الحل

بعد مستقيمين عن بعضهما

ليكن L_1 و L_2 مستقيمان متوازيان

لإيجاد البعد بينهما نوجد نقطة من L_1 ثم نحسب بعدها عن L_2

باستخدام القانون السابق

* أوجد البعد بين المستقيمين

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{9}$$

$$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$$

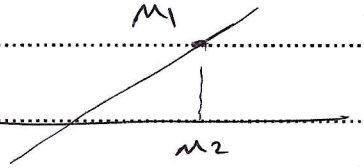
الجواب:

$$D = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

حالة خاصة:

إذا كان L_1 و L_2 غير متوازيان (متخالفان)



ولكن M_1 نقطة من L_1

M_2 نقطة من L_2

لنرمز بـ D للبعد بين M_1 و M_2

إن هذا البعد يتضح بتعيين موضع النقطتين على L_1 و L_2

إن هذا البعد في هذه الحالة هو أحد أبعاد المكعب

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\left(\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}\right)\right| \Big/ \left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{v_2}\right|$$

إذا كان A_1A_2 أحد الأبعاد المكعب كان A_1A_2 عمودياً على كل من $\overrightarrow{v_1}$ و $\overrightarrow{v_2}$

مثال:

أحسب أحد أبعاد المكعب بين المستقيمين

$$L_1:\begin{cases} P_1: x+y-z=0 \\ P_2: x-z+1=0 \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} P_1: x-y+z+5=0 \\ P_2: 2x-z+5=0 \end{cases}$$

نكتب L_1 و L_2 بالشكل الوسيط

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$L_1: \begin{cases} x = t \\ y = -t + 2 \\ z = t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3t + 8 \\ z = 2t + 5 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$\vec{v_1}(1, -1, 1)$, $\vec{v_2}(1, 3, 2)$

$M_1 \in L_1 (0, 2, 4)$

$M_2 \in L_2 (0, 8, 5)$

$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = (-5, -1, 4)$

$|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}| = \sqrt{42}$; $\vec{M_1M_2}(0, 6, 1)$

$(\vec{M_1M_2}) \cdot (\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}) = -6 + 4 = -2$

$$D = \frac{|-2|}{\sqrt{42}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z