كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

الزاوية بين مستويين :

ليكن لدينا المستويان المتقاطعان

$P_1 : p_1 x + q_1 y + r_1 z + d_1 = 0$

$P_2 : p_2 x + q_2 y + r_2 z + d_2 = 0$

الزاوية بين P_1 و P_2 هي الزاوية بين $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$

أي الزاوية الكائنة بين منحنى ناظمين

نفرض θ هي الزاوية الكائنة بين $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{|N_1| \cdot |N_2|}$$

أو بطريقة ثانية

$$\sin\theta = \frac{|\vec{N_1} \wedge \vec{N_2}|}{|\vec{N_1}| \cdot |\vec{N_2}|}$$

ملاحظة :

أ) عندما $\cos\theta = 0 \Leftarrow \vec{N_1}\vec{N_2} = 0 \Leftarrow N_1 \perp N_2$

أي أن المستويان متعامدان

ب) عندما $\cos\theta = \pm 1 \Leftarrow$ أي أن $\theta = 0, \pi$ المركبات متناسبة

$\vec{N_1} \parallel \vec{N_2} \Rightarrow P_1 \parallel P_2$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$

ج) يتطابق مستويان إذا كان :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

ملاحظة: $\frac{x}{0}$ أو $\frac{0}{x} = \frac{z}{y}$

$\Rightarrow x = 0$

$\frac{a}{0}$ أو $\frac{0}{a} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = 0$

مثال:

ضبط الزاوية بين المستويين:

$P_1 = x + 2y - z - 8 = 0$

$P_2 = 3x - y + z - 5 = 0$

$\vec{N_1} (1, 2, -1)$

$\vec{N_2} (3, -1, 1)$

$\cos\theta = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{|\vec{N_1}| \cdot |\vec{N_2}|} = \frac{3 - 2 - 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{11}} = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

المستويان متعامدان.

بعد نقطة معلومة عن مستوٍ معلوم:

ليكن $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ نقطة معلومة لا تقع على المستوي P عندها يتحدد بعد M_1 عن المستوي P بالعلاقة:

$$dist(M_1, P) = \frac{|P_1 x_1 + q_1 y_1 + r_1 z_1 + d|}{\sqrt{P_1^2 + q^2 + r^2}}$$

مثال: احسب بعد $M (2, -1, 4)$ عن المستوي

$P : 2x + y - z + 7 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل

$$|D| = dist(M,p) = \frac{|4+1-4+7|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

المعادلة الناظمية لمستوي:

إذا كانت $\|\vec{N}\| = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = 1$ حيث $\vec{N}$ هو متجه ناظم للمستوي p

$$p : px+qy+rz+d=0$$

أما في حال كون المعادلة غير ناظمية فإنه يمكن تحويلها إلى ناظمية بتقسيم طرفيها على $\|\vec{N}\|$

$$p : \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}x + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}y + \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}z + \frac{d}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = 0$$

ملاحظة:

إذا كانت $d>0$ نقسم على $\|\vec{N}\|$

$d<0$ نقسم على $\|\vec{N}\|-$

مثال: اكتب المعادلة الناظمية للمستوي p

$$p : 3x+3y-2z-3=0$$

$$d=-3<0$$

نقسم على $\|\vec{N}\|-$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$$

$$p : \frac{-3}{\sqrt{22}}x - \frac{3}{\sqrt{22}}y + \frac{2}{\sqrt{22}}z + \frac{3}{\sqrt{22}} = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المستوي المنصف لزاوية مستويين معلومين :

المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن المستويين المعلومين يسمى بالمستوي المنصف لزاوية مستويين

المنصف لزاوية مستويين إما أن يكون منصفاً داخلياً أو منصفاً خارجياً فإذا كانت الزاوية بين المستويين حادة فالمستوي المنصف هو منصف داخلي

أما إذا كانت الزاوية بين المستويين منفرجة فإن المستوي المنصف هو منصف خارجي

لنوجد معادلة المنصفين

ليكن

$$P_1 : p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0$$

$$P_2 : p_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0$$

ولتكن $M(x,y,z)$ نقطة متحولة من مستوي المنصف

عندها يكون بعدها عن P_1 مساوياً لبعدها عن P_2

$$dist(M,P_1) = dist(M,P_2)$$

$$\frac{|p_1x + q_1y + r_1z + d_1|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \frac{|p_2x + q_2y + r_2z + d_2|}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

$$\frac{p_1x + q_1y + r_1z + d_1}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \mp \frac{p_2x + q_2y + r_2z + d_2}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

المنصف الداخلي يوافق الزاوية الحادة بين المستويين أي عندما

$$\cos\theta > 0$$

$$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} > 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وإذا كانت الزاوية بين المستويين منفرجة كان

$\cos\theta < 0$

$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} < 0$

بالتالي إشارة (+) توافق خارجي

" " (−) توافق داخلي

ملاحظة:

إشارة $\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}$ توافق إشارة المضف الخارجي دائماً

مثال:

أوجد معادلتي المضف الداخلي والخارجي لزاوية مستويين

$P_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0$

$P_2 : 3x - 2y - z + 3 = 0$

الحل:

$M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المضف

$dist(M, P_1) = dist(M, P_2)$

$$\frac{|x - 3y + 2z - 5|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|3x - 2y - z + 3|}{\sqrt{9+4+1}}$$

$$|x - 3y + 2z - 5| = |3x - 2y - z + 3|$$

$$x - 3y + 2z - 5 = \pm (3x - 2y - z + 3)$$

معرفة المضف الداخلي والخارجي:

$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 3 + 6 - 2 > 0$

الإشارة (+) توافق المضف الخارجي

" (−) " " الداخلي

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

معادلة المنصف الخارجي :

$$x-3y+2z-5 = 3x-2y-z+3$$

$$2x+y-3z+8=0$$

معادلة المنصف الداخلي :

$$x-3y+2z-5 = -(3x-2y-z+3)$$

$$x-3y+2z-5 = -3x+2y+z-3$$

$$4x-5y+z-2=0$$

ملاحظة :

عندما $\vec{N_1}\cdot\vec{N_2} < 0$ فإن المنصف الخارجي يوافق الإشارة (−)

والداخلي يوافق الإشارة (+)

حزمة المستويات :

نعلم أنه إذا تقاطع مستويان يتقاطعان بفصل مشترك (مستقيم) نسمي هذا الفصل المشترك محور حزمة المستويات

نسمي حزمة المستويات المارة من الفصل المشترك للمستويين كلها بحزمة المستويين

أما إذا كان المستويان متوازيان فإن مجموع المستويات المتوازية فيما بينها هي حزمة المستويات

نفرض P_1 و P_2 مستويان متقاطعان $(N_1 \neq N_2)$ بفصل مشترك L

نسمي L محور الحزمة

و P_2 و P_1 قاعدة الحزمة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المعادلة العامة لأي مستوي يمر بالفصل المشترك للمستويين P_1, P_2 هي

$$P(\lambda): P_1 + \lambda P_2 = 0$$

أو

$$P(\lambda): P_2 + \lambda P_1 = 0$$

حيث (λ) وسيط أو متحول.

تكتب المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$(P_1 x + q_1 y + r_1 z + d_1) + \lambda(P_2 x + q_2 y + r_2 z + d_2) = 0$$

$$(P_1 + \lambda P_2)x + (q_1 + \lambda q_2)y + (r_1 + \lambda r_2)z + d_1 + \lambda d_2 = 0$$

وهي معادلة مستوي ناظمة

$$\vec{N}\ (P_1 + \lambda P_2\ ,\ q_1 + \lambda q_2\ ,\ r_1 + \lambda r_2)$$

عند تعويض قيمة معينة لـ λ نحصل على معادلة مستوي من الحزمة

* نقاط الفصل المشترك لا تحقق معادلة الحزمة

مثال:

أوجد معادلة المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين

$$P_1: 2x - 3y + z - 3 = 0$$

$$P_2: x + 3y + 2z + 1 = 0$$

في الحالتين الآتيتين:

1. المار بالنقطة $M(2, -1, 1)$
2. الموازي للمحور ox

الحل: نكتب صرمة المستويات

$$P(\lambda): P_1 + \lambda P_2 = 0$$

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(2+\lambda)x + (-3+3\lambda)y + (1+2\lambda)z - 3 + \lambda = 0$

ناظم الكرمة هو:

$\vec{N}(2+\lambda, -3+3\lambda, 1+2\lambda)$

الحالة الأولى:

(أ) نختار من الكرمة مستوياً يمر بـ M أي M تحقق $p(\lambda)$

$p(\lambda) = (2+\lambda)(2) + (-3+3\lambda)(-1) + (1+2\lambda)(1) - 3 + \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$

$\boxed{\lambda = -\frac{5}{2}}$ المستوي المطلوب هو $p(-\frac{5}{2})$ نعوض

بمعادلة الكرمة

$p(-\frac{5}{2}): x + 21y + 8z + 11 = 0$

الحالة الثانية:

نختار من الكرمة مستوياً موازياً للمحور ox

أي أن الذي ناظمه $\vec{N}$ يعامد شعاع توجيه ox

$\vec{v}(1,0,0)$

$\vec{N} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$

$2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$

المستوي المطلوب $p(-2)$ نعوض $\lambda = -2$ بمعادلة الكرمة

$p(-2): 9y + 3z + 5 = 0$

مثال 1

أوجد معادلة المستوي الذي ينتمي إلى حزمة المستويات

$p(\lambda): x + 3y + 7z + 36 + \lambda(2x + y - z - 15) = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ويبعد عن المستوى مسافة $D = 3$

$P(\lambda) = (1+2\lambda)x + (-3+\lambda)y + (7-\lambda)z + 36 - 15\lambda = 0$ المطلوب

$|D| = dist(o, p) = 3$

$$\frac{|36-15\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2}} = 3$$

$$|36-15\lambda| = 3\sqrt{(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2}$$

نربع

$$(36-15\lambda)^2 = 3\left[(1+2\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (7-\lambda)^2\right]$$

$$19\lambda^2 - 104\lambda + 85 = 0$$

$$(19\lambda - 85)(\lambda - 1) = 0$$

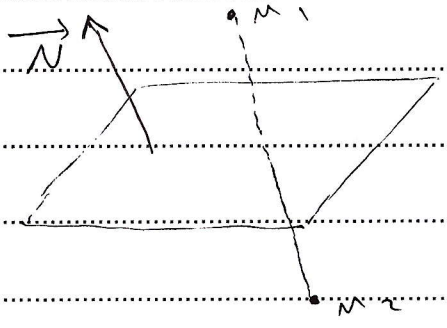
$\Rightarrow$ إما $\lambda_1 = 1$

أو $\lambda_2 = \frac{85}{19}$

يوجد مستويان يبعدان عن المبدأ بُعد المسافة

$P(1): 3x - 2y + 6z + 21 = 0$

$P\left(\frac{85}{19}\right): 189x + 28y + 48z - 591 = 0$



نناظر نقطتين بالنسبة لمستوي:

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r}$$

$$p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + q\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + r\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + d = 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

لتكن $M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

نقطتان من الفراغ نعرف عن هاتين النقطتين أنهما متناظرتان بالنسبة للمستوي p إذا كان هذا المستوي يمر من القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$ في منتصفها أي إذا كان $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{N}$ ويمر المستوي p من منتصف M_1M_2

ومنه يكون

$$\frac{x_2-x_1}{p} = \frac{y_2-y_1}{q} = \frac{z_2-z_1}{r} \quad (1)$$

وإذا كانت M_0 هي منتصف $[M_1M_2]$

$$M_0 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

تحقق معادلة المستوي

$$p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + q\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + r\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

المعادلات (1) و (2) تمكننا بالكل المشترك من إيجاد إحداثيات M_2

مثال:

أوجد نظيرة النقطة $M_1(1, 3, -4)$ بالنسبة للمستوي p:

$$p: 3x + y - 2z = 0$$

الحل:

نفرض نظيرة M_1 هي M_2

$$M_2(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{N}$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-2} \quad (1)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وأيضاً منتصف M_2M_1 ننتمي للمستوي أي

$$M_0\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z-4}{2}\right) \in P$$

$$3\left(\frac{x+1}{2}\right)+\left(\frac{y+3}{2}\right)-2\left(\frac{z-4}{2}\right)=0$$

نضرب (X_2)

$$3x+3+y+3-2z+8=0$$

(2) $$\boxed{3x+y-2z+14=0}$$

بأكمل المسألة من (1)

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}$$

$$x-1=3y-9$$

(3) $$\boxed{x-3y+8=0}$$

$$\frac{x-1}{3}=\frac{z+4}{-2}$$

$$-2x+2=3z+12$$

(4) $$\boxed{3z+2x+10=0}$$

من (3)

$$\boxed{y=\frac{8+x}{3}}$$

من (4)

$$\boxed{z=\frac{-10-2x}{3}}$$

نعوض بـ (2)

$$3x+\left(\frac{8+x}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{-10-2x}{3}\right)+14=0$$

نضرب (X_3)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x=-5 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow M_2(-5,1,0)$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مصيفة ١

① أوجد معادلة المستوي P الذي يناظر Q بالنسبة للمستوي P

$Q \equiv x - 2y + z - 1 = 0$

$P \equiv 2x + y - 2z = 0$

② أوجد المسافة بين المستويين المتوازيين

$P_1 : x - 3y + 2z + 1 = 0$

$P_2 : x - 6y + 4z + 3 = 0$

أوجد نظيرة النقطة $M_1(1, 0, -1)$ بالنسبة للمستوي

$x + y + z + 1 = 0$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z