كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الرابعة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمارين:

1) التحويلات الأولية على المصفوفات:

1) يمكن ضرب أي سطر أو عمود بأي عدد لا يساوي الصفر.

2) يمكن ضرب أي سطر أو عمود بعدد وجمعه إلى سطر أو عمود آخر.

3) يمكن المبادلة بين أي سطرين أو أي عمودين.

2) نقول عن مصفوفتين A و B أنهما متكافئتان إذا انتجت أحدهما عن الأخرى بعدد منتهي من التحويلات الأولية ونرمز لها بالرمز $A \sim B$

3) المصفوفات المتكافئتان لهما نفس الرتبة

$$A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$$

4) رتبة أي مصفوفة تساوي رتبة منقولها

$$r(A) = r(A^T)$$

5) رتبة مصفوفة مربعة نظامية يساوي رتبتها

$$\det \neq 0$$

أي نفرض A مصفوفة نظامية مربعة من المرتبة n $\Rightarrow$ $r(A) = n$

- المصفوفة شبه المثلثية:

تكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nc} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

- مبرهنة:

رتبة أي مصفوفة تساوي عدد أسطر المصفوفة الشبه المنحرفة المكافئة لها.

مثال: اوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\2&1&4&3\\1&2&5&0\\5&4&13&6\end{bmatrix}\begin{matrix}\\-2i_1+i_2\\-i_1+i_3\\-5i_1+i_4\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\\0&-1&-2&1\end{bmatrix}\overset{i_2+i_3}{\underset{-i_2+i_4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)=2$$

- إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام التحويلات الأولية:

لإيجاد مقلوب مصفوفة A من الدرجة n

1) نكتب المصفوفة الموسعة $[A:I_n]$

2) نجري تحويلات أولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح من الشكل $[I_n:A^{-1}]$

مثال: أوجد مقلوب المصفوفة التالية باستخدام التحويلات الأولية:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-5i_1+i_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{i_3}{-4}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[-i_3+i_1]{-3i_3+i_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{15}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{i_2}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{-i_2+i_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

حل جملة المعادلات الخطية :

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

في الحالة العامة $m \neq n$

- سنسمي $b_1, b_2, \dots, b_m$ بالقيم الثابتة أو القيم الحرة
- إذا كانت $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

نقول عن الجملة السابقة متجانسة، بينما إذا كان أحدها على الأقل لا يساوي الصفر فإنها غير متجانسة

- سنسمي a_{ij} حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ معاملات جملة المعادلات

أو نقول :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة المثال

- طريقة كرامر لحل جملة معادلات يكون فيها $m=n$:

نحسب محدد مصفوفة المثال Δ

أ) $\Delta \neq 0$ فإن الجملة حل وحيد

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$ ، $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ ، ـــــ

حيث Δx_1 هو محدد مصفوفة المثال بعد استبدال العمود

ن بعمود الثوابت

ب) $\Delta = 0$ ـــــ $\Delta x \neq 0$ ⇐ الجملة مستحيلة الحل

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = 0$ /

⇐ الجملة عدد لانهائي من الحلول

ـــــــــــ

مثال: أوجد حل جملة المعادلات التالية باستخدام طريقة كرامر.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$$

الحل: نحسب محدد المثال

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

نفشر حسب السطر الأول:

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4-3) - 3(2-9) + 1(1-6)$$

$$= 2(1) - 3(-7) + 1(-5) = 2 + 21 - 5 = 18 \neq 0$$

⇐ الجملة حل وحيد

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 9(4-3) - 3(12-24) + 1(6-16)$$

$$= 9(1) - 3(-12) + 1(-10) = 9 + 36 - 10 = 35$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{18}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2(12-24) - 9(2-9) + 1(8-18)$$

$$= 2(-12) - 9(-7) + 1(-10) = -24 + 63 - 10 = 29$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{29}{18}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(16-6) - 3(8-18) + 9(1-6)$$

$$= 2(10) - 3(-10) + 9(-5) = 20 + 30 - 45 = 5$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{18}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

طريقة غاوس جوردان:

1) نكتب المصفوفة الموسعة لجملة المعادلات الخطية:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

2) نجري تحويلات أولية على المصفوفة $\bar{A}$ لتحويلها إلى مصفوفة سلمية مخروطية $\bar{B}$ ونناقش الحالات التالية:

أ) إذا ظهر أحد الأسطر في $\bar{B}$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 = c \neq 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c \neq 0$$

الجملة مستحيلة الحل

ب) إذا حصلنا على مصفوفة مثلثية $(m=n)$

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & b_{nn} & c_n \end{array}\right]$$

للجملة حل وحيد وتصبح الجملة بالشكل:

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1$$

$$b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2$$

$$\vdots$$

$$b_{nn}x_n = c_n$$

نبدأ الحل من المعادلة الأخيرة والتعويض في المعادلة التي تسبقها

ج) إذا حصلنا على مصفوفة سلمية مخروطية من الشكل:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\bar{B} = \left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & b_{ik} & b_{in} & c_i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

للحلة عدد لانهائي من الحلول.

للتعبير عن هذه الحلول نكتب جملة المعادلات المكافئة للمصفوفة $\bar{B}$

$$(I)\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = c_2 \\ b_{ik}x_i \cdots + b_{in}x_n = c_i \end{cases}$$

كل الحلة (I) يكون لدينا مجاهيل رئيسية (عددها = عدد أسطر (I)) وهي المجاهيل الموجودة ببداية كل معادلة في (I)، أما بقية المجاهيل سنسميها مجاهيل حرة.

نعطي المجاهيل الحرة قيم كيفية مثل: $x_1, x_2 \cdots$

ونكتب المجاهيل بدلالة هذه القيم الكيفية (الحرة) فنكون قد عبرنا عن الحلول الغير منتهية لجملة المعادلات.

مثال: حل بطريقة غاوص جملة المعادلات:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} -i_1 + i_2 \\ -3i_1 + i_3 \\ \sim \\ -2i_1 + i_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -i_2 + i_3 \\ \sim \\ -i_2 + i_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

للجملة عدد لانهائي من الحلول.

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases}$$

لدينا مجهولين رئيسيين x_1 و x_2 ومجهولين حرين x_3 و x_4

نفرض $x_3 = \alpha$ و $x_4 = \beta$ بالتعويض في (I)

$$x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$$

$$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$$ نعوض في المعادلة الأولى

$$x_1 + 20\alpha - 34\beta - 4 - 3\alpha + 5\beta = 1$$

$$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحلول:

$$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5$$
$$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$$
$$x_3 = \alpha$$
$$x_4 = \beta$$

; $\alpha, \beta \in R$

مثال: حل جملة المعادلات الخطية مناقشاً حسب قيم λ

$$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$$

الحل: نكتب المصفوفة الموسعة:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \quad \text{نبدل } i_1 \leftrightarrow i_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} -i_1 + i_2 \\ -\lambda i_1 + i_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & -\lambda^2+1 & -\lambda+1 \end{array}\right] \quad i_2 + i_3$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & -\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda+1 \end{array}\right]$$

نأخذ جملة المعادلات المكافئة

$$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1$$

$$(-1+\lambda)x_2 + (-\lambda+1)x_3 = 0$$

$$(-\lambda^2+\lambda+2)x_3 = -\lambda+1$$

$$-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

في حالة $\lambda = -2$ نعوض في المعادلة الأخيرة

$0x_3 = 3 \Rightarrow$ الجملة مستحيلة الحل

في حالة $\lambda = 1$ نعوض في المعادلة الأخيرة

$0.x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow$ الجملة عدد لانهائي من الحلول

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

نوجد مجهول رئيسي واحد وليكن x_1

المجاهيل الحرة x_2, x_3

نفرض: $x_2 = \alpha$ ، $x_3 = \beta$

$\Leftarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الحلول:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

$\lambda \neq 1, -2$ ⇐ المجموعة مستقلة خطياً

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z