كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : جبر خطي

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2026

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تكملة لخواص المحددات: (من المحاضرة السابقة)

6) إذا كان لدينا في محدد سطر أو عمود كل عناصره أصفار فإن قيمة المحدد تساوي الصفر

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

7) لا تتغير قيمة محدد إذا ضربنا عناصر أي سطر (أو عمود) بعدد وجمعناه إلى سطر أو عمود آخر.

ملاحظة: التغيير لا يتم على السطر (أو العمود) الذي ضربناه بالعدد وإنما التغيير يتم على السطر (أو العمود) الذي تمت عليه عملية الجمع

مثال: احسب قيمة المحدد

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-3i_1 + i_3]{-2i_1 + i_2} A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-i_2 + i_3} A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1(9)(-3) = -27$$

ملاحظة: التحويلات تتم فقط على الأسطر أو الأعمدة ولا يمكن إجراء التحويلات على الأسطر والأعمدة معاً.

مثال:

$$A=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&5&1\\3&3&-1\end{vmatrix}\xrightarrow[-j_1+j_3]{2j_1+j_2}A=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&9&-1\\3&9&-4\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{9}j_2+j_3}A=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&9&0\\3&9&-3\end{vmatrix}=1(9)(-3)=-27$$

٤) إذا كانت جميع عناصر سطر (أو عمود) تكتب على شكل مجموع حدين أو حدين فإنه يمكن كتابة المحدد على شكل مجموع محددين.

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\x+y&t+z&n+m\\e&f&g\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\x&t&n\\e&f&g\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&b&c\\y&z&m\\e&f&g\end{vmatrix}$$

مثال: أثبت المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&3&\cdots&3\\0&0&0&\cdots&n-1\\x&x&x&\cdots&x+n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&3&\cdots&3\\0&0&0&\cdots&n-1\\x&x&x&\cdots&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&2&2&\cdots&2\\0&0&3&\cdots&3\\&&&&\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=0+(2)(3)\cdots n=n!$$

نلاحظ أن السطر الأول والعمود متناسبان

= قيمة المحدد صفر

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- تعريف المتمم الجبري:

المتمم الجبري لعنصر a_{ij} من المحدد $|A|$ هو عبارة عن الجداء:

$$(-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij}$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

المتمم الجبري للعدد $a_{23}=5$ هو:

$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-2-6) = 8$$

- نشر محدد:

هو مجموع جداء عناصر أي سطر (أو عمود) بمتمماتها الجبرية.

مثال: احسب قيمة المحدد:

$$I = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

النشر وفق السطر الأول:

$$I = 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-15) - 1(-13) - 4(6) = -45 + 13 - 24 = -56$$

النشر وفق العمود الثاني:

$$I = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$I = 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1(-13) - 3(23) = 13 - 69 = -56$$

- محدد فاندرموند:

$$Dn = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^{n-1} \\ & & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\prod_{k>l}(a_k - a_l) \quad ; \quad l \le k \le n$$

$$1 \le l \le n-1$$

مثال: اوجد قيمة المحدد:

$$Dn = \begin{vmatrix} 1 & \overset{a_1}{5} & 25 & 125 \\ 1 & \overset{a_2}{3} & 9 & 27 \\ 1 & \overset{a_3}{4} & 16 & 64 \\ 1 & \overset{a_4}{2} & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (2-4)(2-3)(2-5)(4-3)(4-5)(3-5)$$

$$= -2(-1)(-3)(1)(-1)(-2) = -12$$

- تعريف:

نقول عن مصفوفة A انها نظامية اذا كان:

$$|A| = \det(A) \neq 0$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

اذا كانت A مصفوفة نظامية مربعة من الرتبة n فإنها تملك مقلوب من الرتبة n نرمز له بالرمز A^{-1} وتحقق:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

- المصفوفة المساعدة لمصفوفة مربعة:

هي مصفوفة مربعة (A) وهي منقول المصفوفة التي عناصرها المتممات الجبرية لعناصر A ونرمز لها بالرمز $\lceil(A)$

مثال: أوجد المصفوفة المساعدة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نوجد مصفوفة المتممات الجبرية:

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 8 & -2 \\ -7 & 5 & -1 \\ 15 & -11 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lceil(A) = \begin{bmatrix} -10 & -7 & 15 \\ 8 & 5 & -11 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- ايجاد مقلوب مصفوفة A :

1) نحقق أن $\det(A) \neq 0$

2) نحسب المصفوفة المساعدة $\Gamma(A)$

3) مقلوب المصفوفة $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \Gamma(A)$

- من المثال السابق : أوجد A^{-1}

وفق السطر الثاني :

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)(-7) + 0 + 5(-1) = 7 - 5 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Gamma A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -10 & -7 & 15 \\ 8 & 5 & -11 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -\frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -\frac{11}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- صغير المصفوفة : $A = [a_{ij}]_{n \times m}$

هو عبارة عن محدد (معين) مؤلف من K سطر و K عمود من المصفوفة A يسمى معين من الرتبة K

- مثال : لتكن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

يسمى : $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}$ معين من الرتبة الثانية ناتج من تقاطع السطرين الأول والثاني مع العمودين الأول والثاني

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

سمي: $\begin{vmatrix} y & z \\ s & -1 \end{vmatrix}$ معين من الرتبة الثانية

سمي: $\begin{vmatrix} b & c & d \\ y & z & t \\ s & -1 & 0 \end{vmatrix}$ معين من الرتبة الثالثة

نلاحظ أنه في هذه الصفوفة لا يمكن الحصول على صغير (معين) من الرتبة الرابعة لعدم وجود أربعة أسطر

تعريف: رتبة صفوفة A:

هي رتبة أكبر صغير منها لا يساوي الصفر ونرمز لها بالرمز $r(A)$

أمثلة: عين رتبة الصفوفة A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

إذا أخذنا أي محدد من الرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

لذلك نأخذ محدد (صغير) من الرتبة الثانية:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$ الصفوفة A من الرتبة 1 $\Leftarrow$ $r(A)=1$

لأن الصفوفة من الرتبة 1 $\Leftarrow$ قيمتها $\neq 0$ [1] أو [2] أو [3] إذ [1]

$\Leftarrow$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

اذا اخترنا: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=0$ تناسب سطرين

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=1(8)-2(6)+4(-4)=$$

$$8-12-16=-20\neq 0$$

$\Rightarrow$ رتبة المصفوفة 3

$\Rightarrow r(A)=3$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z