كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : احتمالات واحصاء

المحاضرة : الثالثة/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

المتغيرات العشوائية:

المتغير العشوائي هو تابع يعرف الأحداث في التجربة بأعداد حقيقية تصف هذه الأحداث، يمكن أن نرمز له بالرمز $X: \Omega \to R$

أو $X: A \to R$

A: مجموعة أحداث التجربة

R: مجموعة قيم التابع

وكل متغير قيم حقيقية ندعوها قيم المتحول العشوائي، وهذا المتغير يعرف كل حدث بعدد مختلف عن العدد الآخر.

ونكتب عادةً احتمال الحدث المقابل للعدد الحقيقي a بالشكل: $P(X=a)$

أما الاحتمال التالي: $F(a)=P(X \le a)$ هو تابع التوزع الاحتمالي وهو تابع تراكمي.

أنواع المتغيرات العشوائية:

1) المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع):

تكون قيم هذا المتغير قيم قابلة للعد مثل: $x_1, x_2, \dots, x_n$

ندعوها قيم المتحول العشوائي وهي قابلة للعد، وكل قيمة من هذه القيم لها احتمال موافق فنكتب جدول بالشكل الآتي ندعوه جدول التوزع الاحتمالي أو جدول قانون الاحتمال

ونذكر فيه جميع قيم المتغير

	A_1	A_2	---	A_n
x	X_1	X_2	---	X_n
$P(X=X)$	P_1	P_2		P_n

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

A_i | احداث شاملة بشكل لذلك $\sum_{i=1} p_i = 1$

ويكون تابع التوزيع له بالشكل :

$F(X \le x_1) = p_1$

$F(X < x_2) = p_1 + p_2$

$F(X \le x_3) = p_1 + p_2 + p_3$

$F(X \le x_n) = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$

مثال: عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية :

$\Omega = \{ (H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H), $ (+5)

$(T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), $ (-2)

$(T,T,T) \}$ (0)

يتم تقسيم فضاء العينة إلى أحداث شاملة بشكل وفق تعريف المتغير العشوائي

كأن نقول مثلاً : متغير عشوائي يدل على ظهور شعار على الأقل مرتين للاعب

5 نقاط

أو شعار واحد فيخسر اللاعب 2 نقطة

أو لا يتبع أي شعار فلا يخسر اللاعب ولا يربح

(في هذه الحالة كانت قطعة النقود متوازنة)

قيم المتغير العشوائي هي الأعداد المرتبطة بالأحداث وبهذه الحالة القانون الاحتمالي هو :

x_i	+5	-2	0
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد وأن تابع التوزيع الاحتمالي هو :

$P(X<5) = 0$, $P(X<0) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

$P(X \le 5) = \frac{4}{8}$

$P(X < -2) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- ملاحظة: قد يكون ترتيب القيم بالمجال العشوائي في الجدول له أهمية عند رسم الرسم وانظر البياني لتابع التوزيع وهو أمر مفضل في حالات الرسم.

- ملاحظة: نأخذ دائماً فكرة التابع المتزايد في الجدول وهو أمر مفيد في الدراسة.

ج) المتغير العشوائي المستمر:

في حال كانت التجارب ترد على قيم غير قابلة للعد كالأوزان والأطوال ودرجات الحرارة والزمن ... إلخ، لا يمكن فصلها أو أن تكون قابلة للعد لذلك نعرف متغير عشوائي يدعوه مستمر وقيم هذا التابع (المتغير) هو تابع يدعوه تابع كثافي.

ويكون احتمال الحدث X محصور بين a, b

$$(P_a(x<b) = \int_a^b f(x).dx$$

أي أنه مساحة المساحة المحصورة بين تابع الكثافة ومحور الفواصل والمستقيمين

$x=b$, $x=a$

ويكون في هذه الحالة الصفات الآتية لتابع الكثافة:

1) $f(x) \geq 0$ دائماً موجب

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$

أما تابع التوزيع الاحتمالي يعطى بالشكل التالي:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{t} f(t).dt \quad ; \quad t \leq +\infty$$

- ملاحظة: تابع التوزيع الاحتمالي هو التابع الذي يعطينا الاحتمالات.

ونلاحظ أن مشتق تابع التوزيع هو تابع كثافة.

مثال: X متحول عشوائي مستمر وعرف وفق تابع الكثافة:

←

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & ; x \in [0,3] \\ 0 & ; x \notin [0,3] \end{cases}$$

واضح أن تابع الكثافة معرف على R ، تحقق انه تابع كثافة وأوجد تابع التوزع الاحتمالي له ؟

الحل: 1) $f(x) \geq 0$ الشرط محقق وصوراً

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ ؟ نتحقق منه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \frac{x^2}{9}\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} - 0 = 1$$ محقق

$\Rightarrow$ فهو تابع كثافة

أما تابع التوزع الاحتمالي له:

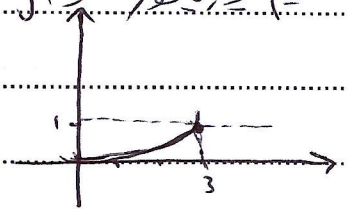
$$F(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{t^2}{9}\,dt + \int_{3}^{+\infty} 0\,dx$$

$$= \left[\frac{t^3}{27}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 :]-\infty, 0[\text{ أي } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{27} : [0,3] \text{ أي } 0 < x \leq 3 \\ 0 :]3, +\infty[\\ 1 : x \geq 3 \end{cases}$$

مستقيم يوازي محور الفواصل



TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: عين قيمة الثابت c لكي يكون التابع f(x) المعرف بالشكل التالي

$$f(x)=\begin{cases} cx & ; 0\le x\le 2 \\ 0 & ; \text{ما ذلك} \end{cases}$$

ثم أوجد تابع التوزيع الاحتمالي واحسب: $P(1<x<2)$

الحل: الشرط الأول: $c>0$

الشرط الثاني: $\int_0^2 cx\,dx=1$

$$\int_0^2 cx\,dx=\left[\frac{cx^2}{2}\right]_0^2=2c=1\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

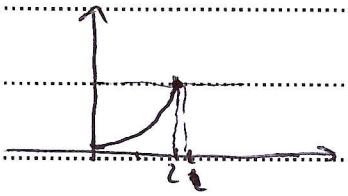
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x & ; [0,2] \\ 0 & ; \text{ما ذلك} \end{cases}$$

تابع التوزيع الاحتمالي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ;]-\infty,0] \\ \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt & ; [0,2] \\ 1 & ; [2,+\infty[\end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{1}{2}t\,dt=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x=\frac{x^2}{4}$$

واضح انه تابع مستمر ويكفي رسمه



$$P(1<x<c_2)=\int_1^2 f(x)\,dx=$$

⇐

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= F(2) - F(1)$$

$$\Rightarrow p(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z