كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : ميكانيك فيزيائي١

المحاضرة :٣+٤ /ن+ع/ د.صالح

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

١٠

2026

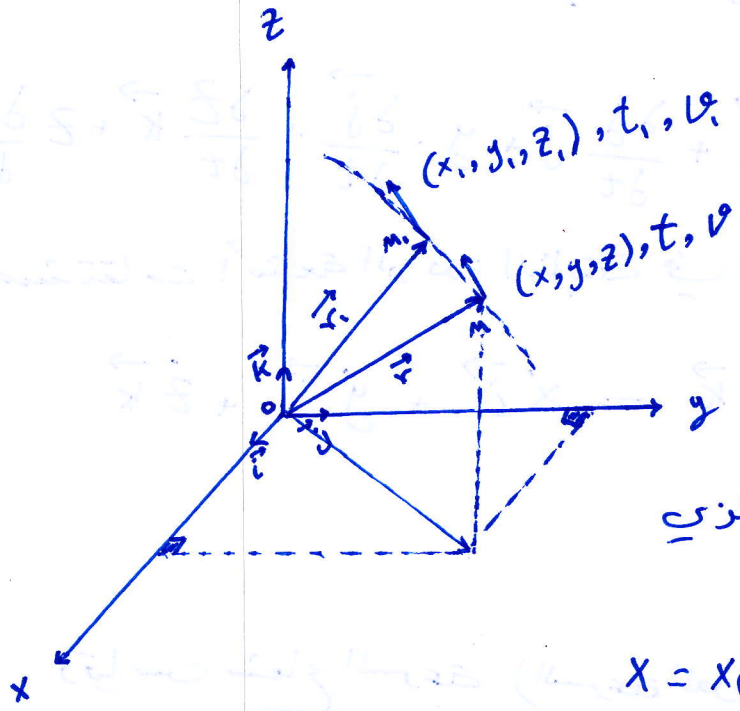
يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

* علم الحركة في الميكانيك يدرس حركة الأجسام المادية من وجهة نظر هندسية بغض النظر عن الأسباب التي أدت إلى الحركة (أي بغض النظر عن القوى المؤثرة على هذه الأجسام)

نقول عن جسم أنه متحرك بالنسبة لجسم ما عندما يتغير موضعه المقاس بالنسبة لهذا الجسم بدلالة الزمن، أما اذا لم يتغير موضعه فالجسم ساكن، فالسكون والحركة كلاهما مفهوم نسبي يتعلق بموضع الجسم بالنسبة لجسم آخر الذي استخدم للمقارنة. لدراسة الحركة يجب اختيار جملة المقارنة وتعيين موضع المتحرك في هذه الجملة

* دراسة الحركة في جملة الاحداثيات الديكارتية:

1- الموضع:



يتعين موضع نقطة ما M بالشعاع $\vec{r}=\vec{OM}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وطويلة هذا الشعاع

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

عندما تتحرك هذه النقطة يتغير موضعها الذي يصبح تابعاً للزمن سما قطه على المحاور

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \qquad (1)$$

نهاية هذا التابع (الشعاع) ترسم منحنياً يعين بالمعادلات (1) ومعادلته تستنتج بحذف الوسيط t من هذه المعادلات، يدعى بمسار المنحني

المعادلات (1) تدعى بمعادلات الحركة

2. السرعة:

اذا كان المتحرك في الموضع M في اللحظة t و الموضع M_1 في اللحظة t_1 فإننا نعرف السرعة الوسطى:

$$\vec{v_m^*} = \frac{\vec{r_1} - \vec{r}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

واحدتها $m.s^{-1}$

أما السرعة الآنية فتعرف بأنها نهاية السرعة الوسطى $\vec{v_m^*}$ عندما $\Delta t \to 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v_m^*} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

وهذا هو تعريف مشتق $\vec{r}$ بالنسبة للزمن

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial t}\vec{i} + x.\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + y.\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k} + z\frac{\partial \vec{k}}{\partial t}$$

مشتقات أشعة الواحدة الثابتة في المنحني والقياس تساوي الصفر يؤدي

$$\vec{v} = \frac{dx}{\partial t}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

وقياس شعاع السرعة (السرعة العددية):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

أما شعاع السرعة فيعبر عنه بالعلاقة:

$$\vec{v} = v.\vec{T}$$

حيث $\vec{T}$ شعاع واحدة المماس

لأن شعاع السرعة محمول على المماس

3 - التسارع : نعرف التسارع الوسطي

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

والتسارع الآني في لحظة ما هو شعاع يساوي مشتق شعاع السرعة الآنية بالنسبة للزمن

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{r} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{\partial t^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\vec{k}$$

$$= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

وقياس شعاع التسارع أو طويلته أو قيمته العددية

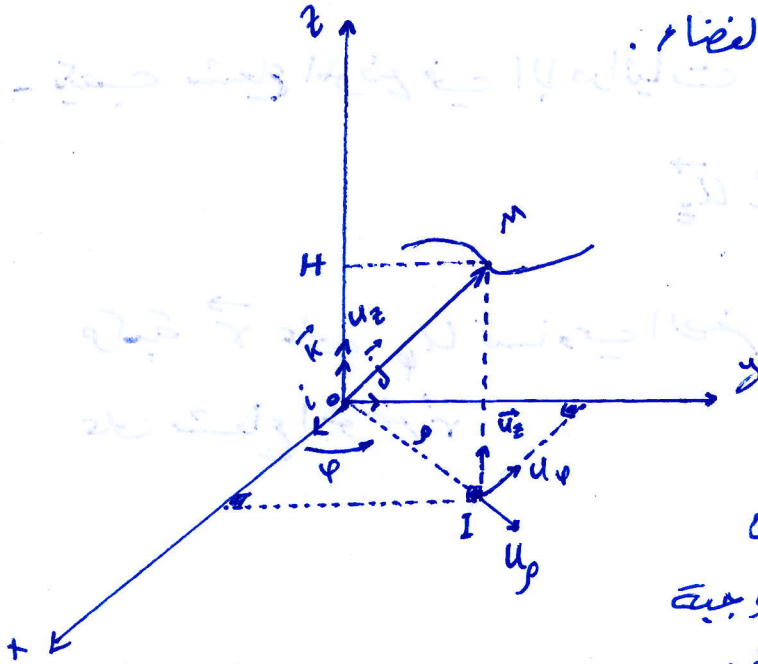
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

★ الإحداثيات الأسطوانية لنقطة من الفضاء.

- نحدد موقع نقطة M ، ما في الفضاء باستخدام ثلاثة أعداد ρ ، φ ، z

- $\rho = OI$ ، حيث I المسقط القائم لـ M على المستوي xOy . يمثل ρ البعد بين المبدأ O و I لذا فإن $\rho \geq 0$ دوماً.

- $\varphi = (\widehat{Ox}, \widehat{OI})$ هي الزاوية بين المحور Ox والشعاع OI . تحسب هذه الزاوية موجبة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.



- Z هي المركبة الديكارتية لشعاع الموضع $\vec{OM}$ على المحور oz ، وهي تساوي القيمة الجبرية $\overline{OH}$ بافتراض H المسقط القائم لـ M على المحور z. يمكن لـ z أن تكون موجبة أو سالبة

- علاقات الإنتقال من الإحداثيات الأسطوانية إلى الديكارتية

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

- علاقات الإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإسطوانية

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \sin\varphi = \frac{x}{\rho} \qquad \cos\varphi = \frac{y}{\rho} \qquad z = z$$

- نعرف في الإحداثيات الأسطوانية الأشعة الواحدية $\vec{u_z}$ ، $\vec{u_\varphi}$ ، $\vec{u_\rho}$

$\vec{u_\rho}$: هو الشعاع الواحدي في اتجاه $\vec{OI}$

$\vec{u_\varphi}$: هو الشعاع الواحدي ، العمودي مباشرة على $\vec{u_\rho}$ في المستوي oxy

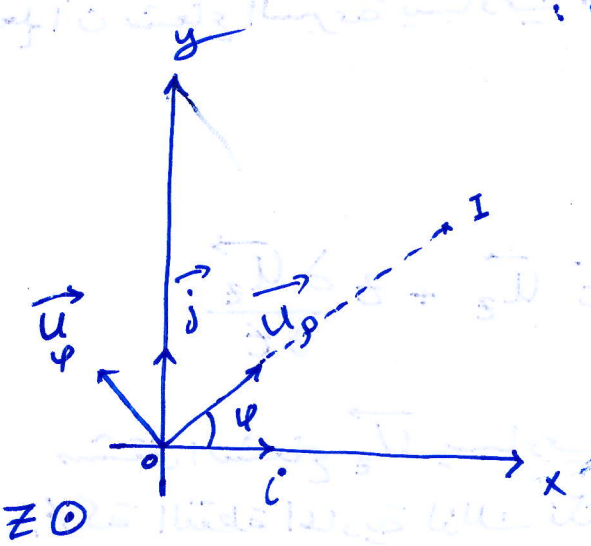
$\vec{u_z}$: هو الشعاع الواحدي على المحور z ، وقد رمزنا له سابقاً بـ $\vec{k}$

- يكتب شعاع الموضع في الإحداثيات الأسطوانية

$$\vec{r} = \rho\,\vec{u_\rho} + z\,\vec{u_z}$$

مركبة $\vec{r}$ على $\vec{u_\varphi}$ تساوي الصفر. لأن الشعاع الواحدي $\vec{u_\varphi}$ عمودي دوماً على شعاع الموضع $\vec{r}$

- في الحالة العامة شعاعا الواحدة $\vec{u_\rho}$ و $\vec{u_\varphi}$ يتغيران أثناء تحرك النقطة المادية فهما شعاعان متغيران مع الزمن ونلاحظ مايلي :



$$\vec{u_\rho} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{u_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

يتغير الشعاعان $\vec{u_\rho}$ و $\vec{u_\varphi}$ مع الزمن ،لأنهما تابعان للزاوية φ التي تتغير في الحالة العامة مع الزمن نستنتج من ذلك أن مشتق الشعاع الواحدي $\vec{u_\rho}$ بالنسبة للزمن هو :

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial t} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}\,\frac{\partial \vec{u_\rho}}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} = \vec{u_\varphi}$$

أي أن مشتق الشعاع الواحدي $\vec{u_\rho}$ بالنسبة لـ φ هو الشعاع العمودي عليه مباشرة في المستوي oxy

تصبح علاقة مشتق الشعاع الواحدي $\vec{u_\rho}$ بالنسبة للزمن

$$\boxed{\frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\frac{\partial \vec{u_\varphi}}{\partial \varphi} = -\vec{u_\rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = -\dot{\varphi}\,\vec{u_\rho}}$$

* شعاع السرعة في الإحداثيات الأسطوانية :

نعلم أن شعاع السرعة يساوي مشتق شعاع الموضع

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z)$$

$$= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{z}\,\vec{u}_z + z \frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

مشتق الشعاع $\vec{u}_z$ يساوي الصفر لأن الشعاع الواحدي على المحور z لا يتعلق بحركة النقطة المادية لذلك نكتب شعاع السرعة في الإحداثيات الأسطوانية :

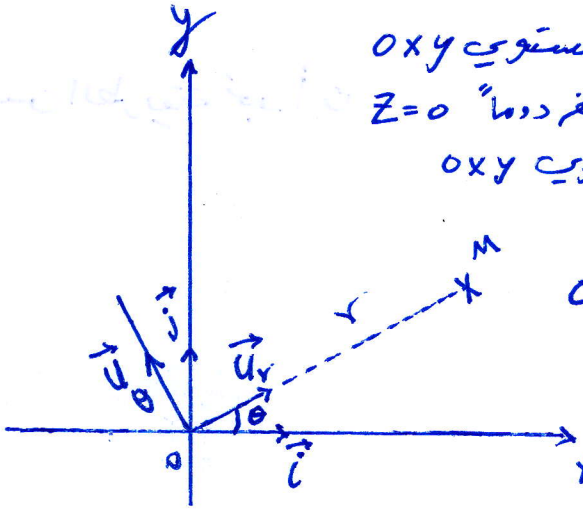
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,u_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

* شعاع التسارع في الإحداثيات الأسطوانية :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{du_\varphi}{dt} + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{u}_z$$

* الإحداثيات القطبية (r, θ) :



عندما تتحرك نقطة مادية M حركة مستوية في المستوي oxy فإن فاصلة هذه النقطة على المحور z تساوي الصفر دوماً $z = 0$ لذلك نقتصر في تحديد موقع هذه النقطة في المستوي oxy على إحداثيتين فقط، ندعوهما الإحداثيات القطبية

الأولى هي r وتساوي بعد النقطة M عن المبدأ O

الثانية هي θ بين ox وشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

تقابل الإحداثيتان القطبيتان r و θ الإحداثيتين x الأسطوانيتين ρ و φ على الترتيب

- نعرف في الجملة القطبية شعاعين واحديين هما $\vec{u_\theta}, \vec{u_r}$

الشعاع $\vec{u_r}$ محمول على $\vec{OM}$ وموجه من O إلى M

الشعاع $\vec{u_\theta}$ عمودي على $\vec{u_r}$ مباشرة

- نبرهن هنا كما برهنا سابقاً في حالة u_ρ و u_φ أن:

$$\frac{\partial \vec{u_r}}{\partial t} = \dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$\frac{\partial \vec{u_\theta}}{\partial t} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$

- يكتب شعاع الموضع في الإحداثيات القطبية على الشكل:

$$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$$

وباشتقاق شعاع الموضع نحصل على شعاع السرعة:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

وباشتقاق شعاع السرعة نحصل على شعاع التسارع:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

★ الإحداثيات الكروية (r, θ, φ):

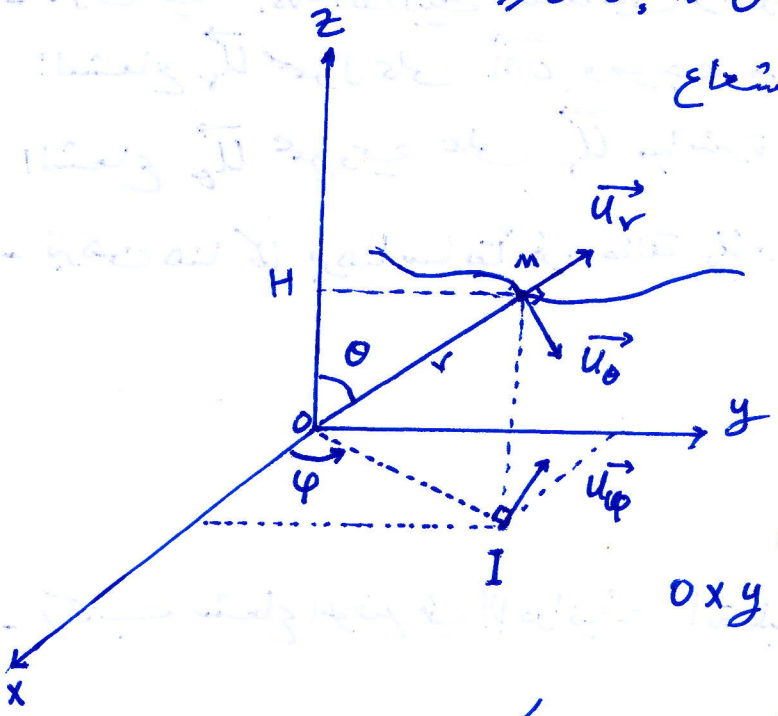
- علاقات الانتقال من الإحداثيات الكروية إلى الديكارتية

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

حيث نحدد موقع النقطة M في الفضاء باستخدام ثلاثة أعداد (φ, θ, r) معرفة كما يلي



- $r = |\vec{OM}|$ ، r تمثل بعد النقطة M عن المبدأ O لذا فإن $r \geq 0$ دوماً"
- $\theta = (\hat{Oz}, \vec{OM})$ ، θ هي الزاوية التي يصنعها شعاع الموضع $\vec{OM}$ مع المحور Oz. القيم الممكنة لـ θ تقع في المجال $[0, \pi]$
- $\varphi = (\hat{Ox}, \vec{OI})$ ، φ هي الزاوية بين المحور Ox والشعاع $\vec{OI}$. حيث I هي المسقط القائم لـ M على المستوي Oxy. تحسب هذه الزاوية موجبة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة في المستوي Oxy

* علاقات الانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الكروية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos(z/r)$$

$$\varphi = \arctan(y/x)$$

- نعرف في الإحداثيات الكروية أشعة الواحدية $\vec{u}_r$ ، $\vec{u}_\theta$ ، $\vec{u}_\varphi$ كما يلي:

• $\vec{u}_r$ هو الشعاع الواحدي على شعاع الموضع $\vec{OM}$

• $\vec{u}_\theta$ هو شعاع واحدي يوازي المستوي OIM، وهو عمودي على $\vec{OM}$ وموجه حسب الجهة الموجبة لـ θ

• $\vec{u}_\varphi$ هو الشعاع الواحدي نفسه الذي عُرف في الإحداثيات الأسطوانية، فهو شعاع واحدي يوازي المستوي Oxy ، وهو عمودي على $\vec{OI}$ هذا الشعاع عمودي على المستوي OIM وهو يتجه دوماً" وفق اتجاه الاصطلاحي الموجب للزاوية φ (أي بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة دوماً")

- شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

- الأشعة الواحدية الثلاثة في الإحداثيات الكروية ، تتغير أثناء تحرك النقطة المادية فهي أشعة متغيرة مع الزمن في الحالة العامة

نبرهن أن المشتقات لهذه الأشعة بدلالة الزمن هي كالتالي :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{u}_\theta$$

- شعاع السرعة في الإحداثيات الكروية .

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$= \dot{r}\,\vec{u}_r + r\left(\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)$$

- يؤدي مركبات شعاع السرعة في الإحداثيات الكروية هي :

$$v_r = \dot{r} \quad , \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad , \quad v_\varphi = r\sin\theta\,\dot{\varphi}$$

* شعاع التسارع في الإحداثيات الكروية :

نعلم أن شعاع التسارع يساوي مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن لذلك نحصل على شعاع التسارع في الإحداثيات الكروية باشتقاق شعاع السرعة و بعد تعويض مشتقي $\vec{u}_\theta$ و $\vec{u}_\varphi$ و اجراء الحسابات اللازمة نجد :

- مركبات شعاع التسارع في الإحداثيات الكروية:

$$a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right)$$

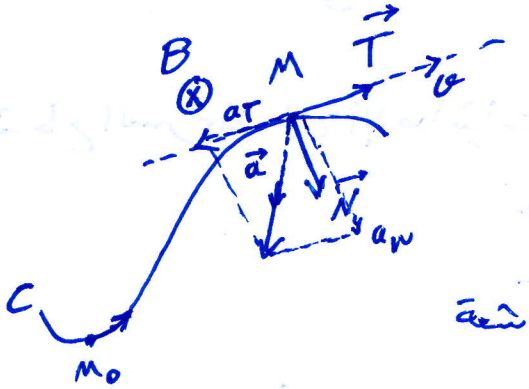
$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$a_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)$$

شعاع التسارع في الإحداثيات الكروية:

$$\vec{a} = a_r \vec{U_r} + a_\theta \vec{U_\theta} + a_\varphi \vec{U_\varphi}$$

* الجملة الموضعية: جملة فرينيه



- ليكن (C) مسار نقطة مادية ما تتحرك في مستو كما في الشكل ولتكن M_0 نقطة مرجعية على هذا المسار. نعرف الفاصلة المنحنية بأنها الطول الجبري للقوس $\overset{\frown}{M_0M}$

ونعرف في كل نقطة من المسار الموجه (C) ثلاثة أشعة واحدية $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ كما يلي:

- الشعاع المماسي $\vec{T}$ ، هو مماس للمسار في M وموجه باتجاه الحركة

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$$

v: طويلة شعاع السرعة ;

- الشعاع الناظمي $\vec{N}$ ، هو الشعاع العمودي على $\vec{T}$ وموجه نحو تقعر المسار

يرتبط هذا الشعاع مع الشعاع المماسي بالعلاقة:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{N}$$

R: نصف قطر التقعر للمسار في النقطة المعتبرة

$\frac{1}{R}$ تقوس المسار في النقطة M

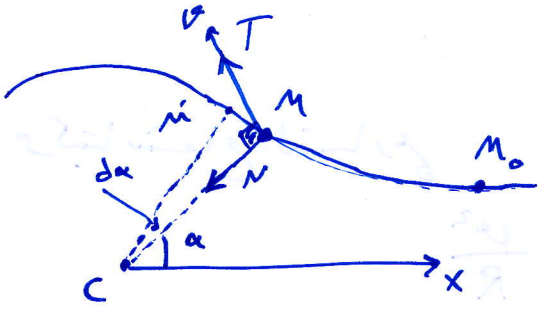
- شعاع السرعة يوازي $\vec{T}$ ولشعاع التسارع مركبتان إحداهما a_T مماسية والأخرى a_N ناظمية المركبة المماسية لشعاع التسارع في هذا الشكل سالبة ما يعني أن الحركة متباطئة
والمركبة الناظمية لشعاع التسارع تتجه دوماً إلى داخل التقعر.

- الشعاع الناظمي الثاني $\vec{B}$ بحيث $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

- برهان العلاقة: $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{N}$

النقطة

نفترض أن نقطة مادية تتحرك على مسار مستوٍ (A). عندما تكون المادية في M يكون قوس المسار في جوار M جزءاً من دائرة، مركزها C ونصف قطرها R تتغير موقع هذا المركز وكذلك قيمة نصف القطر حسب موقع النقطة المتحركة على المسار (A).



نلاحظ من الشكل أن الشعاع الناظمي $\vec{N}$ ينتج عن دوران الشعاع المماسي $\vec{T}$ بزاوية قدرها (90°) وفق الاتجاه الموجب للزاوية α لذا فإن:

$$\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$$

وعندما تنتقل M انتقالاً صغيراً ds على المسار A، تتغير الزاوية α بمقدار صغير $d\alpha$ ويكون لدينا

$$\frac{ds}{d\alpha} = R$$

ومن جهة أخرى يمكننا نكتب:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{ds}$$

نستنتج:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{N}\,\frac{1}{R}$$

- نستنتج من تعريف $\vec{T}$ أن شعاع السرعة هو :

$$\vec{v} = v\,\vec{T} = \frac{ds}{dt}\,\vec{T}$$

وباشتقاق هذه العلاقة ، بالنسبة للزمن نحصل على شعاع التسارع :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$$

ولدينا :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}\vec{N}$$

نحصل من ثم على شعاع التسارع كما يلي :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

اذن مركبتا شعاع التسارع

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{R}$$

- نستنتج : في حالة الحركة المنتظمة حيث تكون قيمة السرعة v ثابتة أي أن $\frac{dv}{dt} = 0$

فالتسارع المماسي معدوم في حالة الحركة المنتظمة .

- عندما يكون التسارع المماسي موجباً فإن السرعة v ستزداد بمرور الزمن وتكون الحركة عندئذٍ متسارعة وكذلك فالتسارع المماسي السالب يعني الحركة متباطئة يعبر التسارع المماسي إذن عن كيفية تغير قيمة السرعة v

- أما التسارع الناظمي فيعبر عن تغير اتجاه الحركة . نلاحظ أن نصف قطر المسار عندما تكون الحركة مستقيمة ، يتناهى إلى اللانهاية $R \to \infty$ ومن ثم $a_N = 0$ في الحركة المستقيمة . وكلما قل نصف قطر التقعر ازدادت قيمة التسارع الناظمي .

ملاحظة: 1) الحركة متسارعة عندما $\vec{a}.\vec{v} > 0$ (التسارع المماسي موجب)
2) الحركة متباطئة عندما $\vec{a}.\vec{v} < 0$ (التسارع المماسي سالب)

الحركة الدائرية:

تكون حركة جسم ما دائرية، إذا كانت حركته مستوية، ومسارها دائري ليكن r نصف قطر هذا المسار، ولنفترض أن مركز هذا المسار يقع في المبدأ O نكتب شعاع الموضع في هذه الحالة، في الإحداثيات القطبية هكذا:

$$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$$

أما شعاع السرعة، فنحصل عليه باشتقاق شعاع الموضع مع ملاحظة أن $r' = 0$ لأن نصف القطر r ثابت:

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

ندعو غالباً المشتق $\dot{\theta}$ السرعة الزاوية للدوران. ونلاحظ أن شعاع السرعة في الحركة الدائرية، مماس للمسار الدائري في كل لحظة وتساوي طويلته جداء نصف القطر في السرعة الزاوية لذا فيكون لدينا $v = r\omega$.

ونحصل على شعاع التسارع باشتقاق شعاع السرعة مع الملاحظة أن $r'' = r' = 0$ لأن نصف القطر ثابت):

$$\vec{a} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + r\,\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

نلاحظ أن لهذا التسارع مركبتين، إحداهما مماسية، محمولة على $\vec{u_\theta}$ المماس للمسار في الحركة الدائرية والأخرى عمودية على المسار، محمولة على $\vec{u_r}$ العمودي على المسار في الحركة الدائرية

بوجه خاص فإن المركبة المماسية للتسارع هي:

$$r\,\ddot{\theta} = r \times d(v/r)/dt = dv/dt$$

تساوي هذه المركبة المماسية المركبة المماسية للتسارع في جملة فرينيه ففي هذه الحالة نلاحظ أن $\vec{u_\theta} = \vec{T}$

- أما المركبة العمودية على المسار فهي دوماً سالبة (بعكس $\overrightarrow{u_r}$) وتساوي

$$-r\dot{\theta}^2 = -r \times (v/r)^2 = -\frac{v^2}{r}$$

هذه المركبة هي نفسها المركبة الناظمية للتسارع في جملة فرينيه حيث

$$\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{N}$$

- حالة خاصة: الحركة الدائرية المنتظمة عندما لا يتغير طول شعاع سرعة الجسم بمرور الزمن أي أن $v = ct$ نستنتج من ذلك أن $\theta' = w = ct$

فالسرعة الزاوية ثابتة ويكون لدينا في هذه الحالة

$$\theta = wt + \theta_0 \qquad v = rw$$

أما التسارع في الحركة الدائرية المنتظمة، فله مركبة ناظمية فقط.

$$a_\theta = dv/dt = 0$$

$$a = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_r} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{N}$$

مثال 1 تتحرك قذيفة في مستوي شاقولي، وتعطى احداثيا x و y على محورين أحداهما ox أفقي والآخر oy شاقولي موجه نحو الأعلى بالعلاقتين التاليتين :

$$x = 5t \quad ; \quad y = -5t^2 + 2$$

اكتب صيغة شعاع الموضع. ثم أوجد معادلة مسار هذه النقطة المادية وما هو شكل المسار ؟

الحل: نكتب شعاع الموضع على الشكل التالي

$$\vec{r} = (5t)\,\vec{i} + (-5t^2 + 2)\,\vec{j}$$

نلاحظ أن شعاع الموضع هنا هو شعاع متغير مع الزمن، طوله ليس ثابتاً وكذلك اتجاهه.

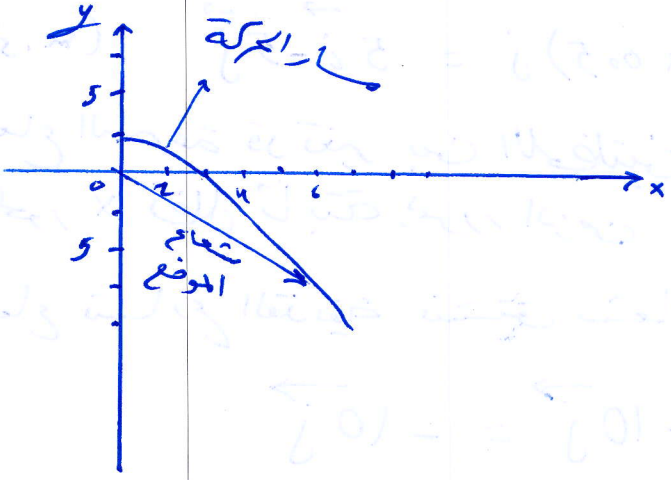
أما معادلة المسار فنحصل عليها بحذف الزمن t نلاحظ أولاً أن $t = \frac{x}{5}$ نعوض في عبارة y فنحصل على

$$y = -5\,\frac{x^2}{25} + 2 = -\frac{x^2}{5} + 2$$

فمعادلة المسار هي

$$y - 2 = -\frac{x^2}{5}$$

والمسار هو جزء من قطع مكافئ ذروته $(0,2)$ وهو مقعر نحو y السالبة



تكملة : احسب بدلالة الزمن ، شعاع سرعة القذيفة الواردة في حدد نوع حركات الحركة على المحورين x و y ؟ وما هو شعاع سرعة القذيفة في اللحظة $t=0$ وما شعاع سرعتها عندما تصبح $x=2,5\ m$ ؟

الحل: شعاع السرعة هو يساوي مشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن

$$\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = 5\,\vec{i} + (-10\,t)\,\vec{j}$$

حركة القذيفة مركبة من حركتين مستقيمتين

الأولى على المحور x سرعتها تساوي $v_x = 5\ m.s^{-1}$ هي حركة مستقيمة منتظمة

الثانية على المحور y سرعتها تساوي $v_y = -10t$ سالبة دوما، تزداد قيمتها المطلقة بانتظام بمرور الزمن فحركة الحركة على المحور y هي مستقيمة متسارعة بانتظام.

نستنتج من علاقة شعاع السرعة ، أن شعاع السرعة في اللحظة الابتدائية $t=0$ هو :

$$\vec{v}(0) = 5\,\vec{i}\ \ m.s^{-1}$$

فشعاع السرعة الابتدائية يوازي المحور x

أما عندما تصبح $x=2,5\ m$ فإن ذلك يوافق لحظة t بحيث $5t=2,5$ أي

$$t = 2,5/5 = 0,5\ s$$

شعاع السرعة عندئذ هو :

$$\vec{v}(0,5) = 5\,\vec{i} + (-10 \times 0,5)\,\vec{j} = 5\,\vec{i} - 5\,\vec{j} \quad (m.s^{-1})$$

نلاحظ أن شعاع السرعة قد تغير بين اللحظتين $t=0$ و $t=0,5\ s$ ، ولكن مركبته على المحور x تظل ثابتة بمرور الزمن

- ولحساب شعاع تسارع القذيفة نشتق شعاع السرعة

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = 0\,\vec{i} - 10\,\vec{j} = -10\,\vec{j}$$

نلاحظ أن شعاع تسارع القذيفة ثابت (طوله ثابت، هو $10\ m.s^{-2}$ واتجاهه ثابت، فهو يتجه دوما نحو y السالبة)

مثال 2 حركة نقطة مادية معطاة بالمعادلتين:

$$y = 6t - 3t^2$$
$$x = 8t - 4t^2$$

عين مسار النقطة المادية وسرعتها وتسارعها حيث (x و y تقاس بالمتر و t بالثانية)

الحل: لإيجاد معادلة المسار نحذف الوسيط t (الزمن) من معادلتي الحركة وذلك بضرب المعادلة الأولى بـ 4 والثانية بـ 3 وطرح الثانية من الأولى فنجد:

$$3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

وبالتالي المسار عبارة عن خط مستقيم يميل على المحور ox بزاوية α حيث $tg\alpha = \frac{3}{4}$

- السرعة:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8(1-t) \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 6(1-t)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \left[64(1-t)^2 + 36(1-t)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[100(1-t)^2\right]^{1/2} = 10(1-t)$$

- التسارع:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -8 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -6$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\ m.s^{-2}$$

- نلاحظ أن مسقطا التسارع على المحورين $\overrightarrow{ox}$ ، $\overrightarrow{oy}$ سالبين دوما
وبالتالي للتسارع اتجاه ثابت من B إلى A

- مسقطا السرعة موجبين عندما $0<t<1$ وبالتالي سرعة النقطة خلال هذه الفترة الزمنية تتجه من O إلى B

وعندما $t=0 \Leftarrow v=10\ m.s^{-1}$

$t=1 \Leftarrow v=0$ مسقطا السرعة عندما $t>1$ سالبين عندئذ

تتجه السرعة من B إلى A وينطبق اتجاهها على اتجاه التسارع.

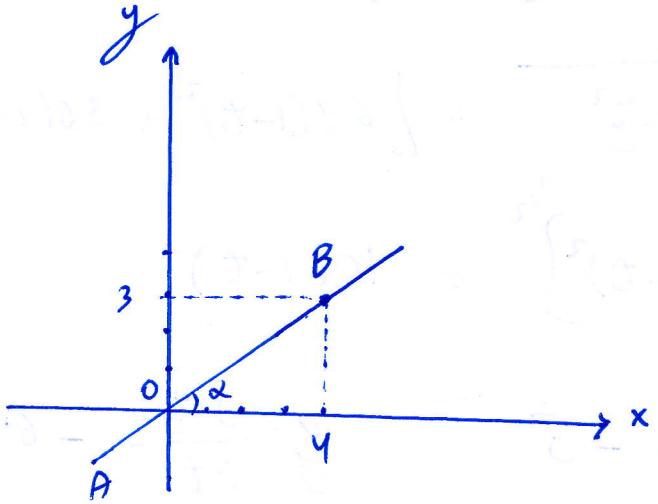
عندما $t=0$ ، $x=0$ ، $y=0$

النقطة B $t=1$ ، $x=4$ ، $y=3$

$t=2$ ، $x=0$ ، $y=0$

$t>2 \Leftarrow x, y$ تزداد في المقدار مع بقائها سالبين

نلاحظ أن الحركة تبدأ من النقطة O بسرعة $v=10\ ms^{-1}$ على امتداد AB وتتحرك في الجزء OB حركة متباطئة وبعد ثانية واحدة تصل النقطة إلى B وتبلغ سرعتها $v=0$ من B تبدأ حركة متزايدة في الاتجاه المعاكس BO حتى الزمن $t=2$ تصل النقطة المادية إلى النقطة (O) وهكذا



مكتبة A to Z