كلية العلوم

القسم : الفيزياء

السنة : الاولى

المادة : تحليل رياضي١

المحاضرة : الرابعة /نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2026

٥

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

التوابع العكسية ومشتقاتها:

- نعلم: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$

حسب تعريف النهاية عندما يسعى Δx إلى الصفر و Δy إلى الصفر

$$y'_x \times x'_y = 1$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \Rightarrow \boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}} \quad (*)$$

- أولاً: الدالة العكسية للدالة $y = \sin x$

هي دالة فردية دورها 2π

مجموعة تعريفها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

مجموعة قيمها $[-1, 1]$

إن الدالة العكسية للدالة $y = \sin x$

هي: $x = \text{arc}\sin y$

* ملاحظة: arg آرغ لفظ فضي

arc آرك لفظ ثلثي

هي دالة فردية دورها 2π

مجموعة تعريفها $[-1, 1]$

مجموعة قيمها $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

لإيجاد المشتقة نفرض أن:

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

من العلاقة (*)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

الدالة: $y = \cos x$

دالة زوجية دورها الدوري 2π

مجموعة تعريفها $[0, \pi]$

مجموعة قيمها $[-1, 1]$

دالتها العكسية $x = \arccos y$

لإيجاد المشتقة:

$$y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y$$

من العلاقة (*)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

الدالة: $y = \tan x$

دالة فردية دورها π

مجموعة تعريفها $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

مجموعة قيمها $]-\infty, +\infty[$

دالتها العكسية: $x = \arctan y$

لإيجاد المشتقة: نفرض أن:

$$y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$$

من العلاقة (*)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

إذا كانت:

$$(\arctan t)' = \frac{t'}{1+t^2} \quad ; \quad t = t(x)$$

الدالة: $y = \cot x$

دالة دورية دورها π

مجموعة تعريفها $[0, \pi]$

مجموعة قيمها $]-\infty, +\infty[$

دالتها العكسية: $x = \operatorname{arc}\cot y$

لإيجاد المشتقة: نفرض أن:

$$y = \operatorname{arc}\cot x \Rightarrow x = \cot y$$

من العلاقة (*) $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2}$

$$(arc\ cot\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$(arc\ cot\ u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$; $u = u(x)$

ثانياً : الدوال القطعية الزائدية ودوالها العكسية ومشتقاتها :

الدالة : $y = Sh\ x$ دالة الساين القطعية

$$Sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

الدالة : $y = Ch\ x$ دالة الكوساين القطعية

$$Ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

الدالة : $y = Th\ x$ دالة التانجانت القطعية

$$Th\ x = \frac{Sh\ x}{Ch\ x} \Rightarrow th\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

الدالة : $y = CTh\ x$ دالة الكوتانجانت القطعية

$$Cth\ x = \frac{Ch\ x}{Sh\ x} \Rightarrow Cth\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

- مشتق الدوال القطعية :

$$(Shx)' = Chx \quad \text{و} \quad (Chx)' = Shx$$

- مشتق الدالة : $y = Thx$

$$(Thx)' = \frac{(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= 1 - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = 1 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2$$

$$\Rightarrow (Thx)' = 1 - Th^2x = \frac{1}{Ch^2x}$$

- مشتق الدالة : $y = Cthx$

$$(Cthx)' = 1 - Cth^2x = -\frac{1}{Sh^2x}$$

- ثالثاً : المشتقات العكسية للدوال القطعية :

مشتقة عكسية للدالة : $y = Shx$

دالتها العكسية : $x = arg\ Sh\ y$

نفترض أن : $y = arg\ Shx$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

دالتها العكسية : $x = \text{Sh}\, y$

من العلاقة ✱

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\text{ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\text{arg Sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

مشتقة الدالة العكسية للدالة : $y = \text{Ch}\, x$

بنفس الخطوات السابقة :

$$(\text{arg ch}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

مشتقة الدالة العكسية للدالة : $y = \text{th}\, x$

دالتها العكسية : $x = \text{arg th}\, y$

نفرض أن : $y = \text{arg th}\, x$

دالتها العكسية $x = \text{th}\, y$

من العلاقة ✱

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1-\text{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\text{arg th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

وهو نفسه $c\,th\,x$

$$(arg\ cth\,x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

- الدوال القاطعة القطعية:

$$Sech\,x = \frac{1}{ch\,x}$$

$$Ce\,sh\,x = \frac{1}{sh\,x}$$

$$(Sech\,x)' = -Sech\,x\,.\,th\,x$$

$$(Ce\,sh\,x)' = -Ce\,ch\,x\,.\,cth\,x$$

- المشتقات العكسية للدوال القاطعة القطعية:

الدوال العكسية للدوال القاطعة

$$(arc\ csc\,x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(arc\ sec\,x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

رابعاً: تطبيقات على المشتقات:

أولاً: دراسة بعض القضايا بالمفهوم الهندسي:

1) معادلة المماس:

من التعريف الأساسي للمشتقات:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = y'$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

عندئذٍ: $y - y_0 = m(x - x_0)$

حيث $m = f'(x_0)$

عندئذٍ تكون معادلة المماس تعطى بالشكل:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

مثال: أوجد معادلة المماس بالنقطة $y_0 = 8$ للدالة $y = x^3$

الحل:

$$y - 8 = 3x^2 \Big|_{x=2} (x - 2)$$

$$y - 8 = 12(x - 2) \Rightarrow y - 8 = 12x - 24 \Rightarrow y = 12x - 24 + 8$$

$$\Rightarrow y = 12x - 16$$

* الدالة التزايدية والمتناقصة ونقطة الرجوع

القيم القصوى ونقطة الانقلاب

النقر والمحاور المتقاربة (جميعها تعتبر تطبيقات على الاشتقاق)

ثانياً: بعض النظريات في التزايدات المحدودة:

- نظرية رول

نفرض لدينا $y = f(x)$ معرفة ومستمرة على $[a,b]$ مجال معرف ومحققة قابلية الاشتقاق.

نقول عن الدالة أنها تحقق شرط رول إذا كانت:

1) من أجل: $c \in]a,b[$ تكون $f'(c) = 0$

2) $f(a) \neq f(b)$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: هل يمكن تطبيق نظرية رول للدالة الآتية:

$$f(x) = 6x^3 + x^2 - 6x + 1$$

اذا امكن ذلك أوجد قيم c التي تحقق نظرية رولس المجال $[-1,1]$

الحل: لا يمكن تطبيق نظرية رول لأن:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -6+1+6+1 = 2 \\ f(1) = 6+1-6+1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = f(1)$$

مثال: مثل المثال السابق ولكن:

$$f(x) = 6x^3 + x^2 + 6x + 1$$

الحل:

$$f(-1) = -6+1-6+1 = -6$$

$$f(1) = 6+1+6+1 = 10$$

$$f(-1) \neq f(1)$$

يمكن تطبيقها لأن:

$$f'(x)\Big|_c = 12x^2 + 2x + 6\Big|_c = 0$$

$$6x^2 + x + 2\Big|_c = 0$$

كل المعادلة من الدرجة الثانية وبوضع القيم تكون هذه القيم تنتمي للمجال $[-1,1]$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة